COURS

DE

CINÉMATIQUE

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C[ie]
80666 Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS

DE

CINÉMATIQUE

PAR

Gaston JULIA

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

RÉDIGÉ PAR

Jean DIEUDONNÉ

Élève à l'École Normale supérieure



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1928

PRÉFACE

Le lecteur trouvera ici les leçons de Cinématique destinées aux étudiants de licence qui suivent le Cours de Mécanique Rationnelle à la Sorbonne. La rédaction en a été faite, d'après les notes prises au Cours, par un des meilleurs élèves de l'École Normale supérieure, M. Jean Dieudonné, dont l'intelligente collaboration m'a été fort précieuse. Précieuse aussi, la collaboration de la maison Gauthier-Villars et Cie qui assura l'impression de ce livre avec la haute conscience qu'on lui connaît.

GASTON JULIA.

Juillet 1927.



COURS

DE

CINÉMATIQUE

CHAPITRE I.

CINÉMATIQUE DU POINT.

Définitions. — La Cinématique est la science du mouvement. Elle repose sur les notions qui servent de base à la Géométrie; elle introduit en outre une nouvelle grandeur mesurable, le temps. Nous admettrons la notion du temps, et nous supposerons connus les moyens de le mesurer.

On dit qu'un système de points est *invariable* quand les distances mutuelles des points qui le composent sont invariables par rapport au temps.

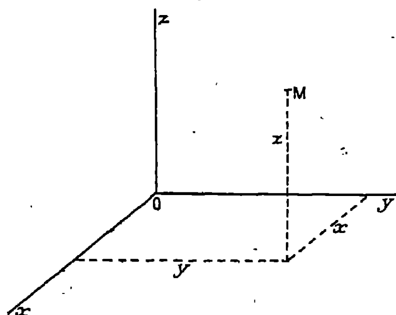
Un tel système s'appelle aussi *corps solide*.

Soit un système invariable S, dit système de *comparaison* ou de *référence*. On dit qu'un point M est *en mouvement* par rapport au système S, quand la distance de M à un point de S au moins varie avec le temps; le point M est dit *au repos* par rapport à S si sa distance *à tout point de* S *reste constante*. On voit que la notion de mouvement est essentiellement relative.

On prend en général comme système de comparaison S un système d'axes de coordonnées cartésiennes, rectangulaires ou obliques (*fig.* 1). La position d'un point M par rapport à un tel système est définie sans ambiguïté par les trois coordonnées x, y, z du point M. Donc, si les trois coordonnées

de M restent constantes, le point M est au repos par rapport à S; si l'une au moins varie avec le temps, M est en mouve-

Fig. 1.



ment. Dans ce dernier cas, les coordonnées de M sont des fonctions du temps t :

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t).$$

Si l'on fait croître le temps t à partir d'un instant initial t_0 jusqu'à un instant t_1, le lieu des positions successives de M constitue la *trajectoire* du point M de l'instant t_0 à l'instant t_1. C'est une courbe C, dont les équations paramétriques sont

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t), \end{aligned}$$

t variant de t_0 à t_1.

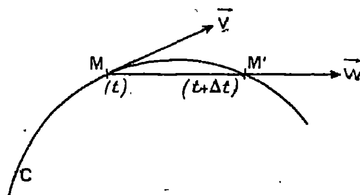
Ces équations définissent la trajectoire du point M et la manière dont elle est parcourue. Si la trajectoire de M est connue *a priori*, on peut procéder autrement pour définir le mouvement de M : il suffit de se donner un sens de parcours et une origine des arcs O sur la trajectoire; tout point de cette courbe est alors défini par son abscisse curviligne $s = \text{arc}\,\widehat{OM}$; si donc on connaît la variation de s en fonction du temps

$$s = s(t),$$

le mouvement de M sera entièrement défini.

Vitesse d'un point. — Soit C la trajectoire du point M (*fig.* 2). Soient M et M′ les positions du point mobile aux instants t

Fig. 2.



et $t+\Delta t$. Considérons la droite MM′, et fixons comme sens positif sur cette droite le sens de M vers M′. On appelle *vitesse moyenne* de M entre les instants t et $t+\Delta t$, un vecteur W porté par la droite MM′, d'origine M, et égal à $\frac{\overline{MM'}}{\Delta t}$ en grandeur et en signe.

Si la position du point M est rapportée à un système d'axes cartésien, les coordonnées de M étant x, y, z, celles de M′$(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, les composantes du vecteur $\overrightarrow{W}$ sur les axes sont

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Supposons maintenant que les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ admettent une dérivée à l'instant t considéré. Si l'on fait tendre alors Δt vers zéro, le vecteur $\overrightarrow{W}$ a pour limite un vecteur $\overrightarrow{V}$, de composantes $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; ce vecteur est appelé *vecteur vitesse* de M à l'instant t. Il est porté par la tangente à la trajectoire, et est dirigé dans le sens du mouvement.

Il résulte de ce qui précède que si, sans changer l'unité de temps, on change l'unité de longueur, le vecteur $\overrightarrow{V}$ ne change pas. Mais, si l'on change l'unité de longueur, Δt est multiplié par un nombre T en sorte que $\overrightarrow{W}$ et $\overrightarrow{V}$ sont multipliés par T^{-1}.

Soit O un point fixe par rapport au système de comparaison auquel on rapporte M, et d'ailleurs quelconque. Si l'on désigne par la notation $\overrightarrow{M}$ le vecteur $\overrightarrow{OM}$, on voit, d'après la définition de la dérivée géométrique d'un vecteur, que le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ est la dérivée de $\overrightarrow{M}$ par rapport au temps, qu'on note $\overrightarrow{M}' = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$, $\overrightarrow{M}'$ est *indépendant* de O.

Supposons la trajectoire de M orientée. Alors, les cosinus directeurs de la tangente orientée en M sont

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

D'autre part, on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \alpha\frac{ds}{dt},$$

$$\frac{dy}{ds} = \beta\frac{ds}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma\frac{ds}{dt},$$

ce qui montre que la valeur algébrique du vecteur vitesse sur la tangente dirigée est égale à $\frac{ds}{dt}$; le signe de cette quantité indique donc si le mouvement se fait dans le sens des s croissants ou dans le sens contraire.

Théorème. — *La vitesse de la projection d'un point sur un plan (ou sur un axe) est égale à la projection sur ce plan (ou cet axe) de la vitesse du point de l'espace considéré.*

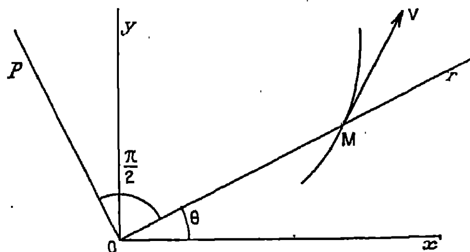
On démontre de suite ce théorème en prenant comme plan (ou axe) de coordonnées le plan (ou l'axe) de projection.

Projections de la vitesse en coordonnées polaires dans le plan. — Soient M le point se déplaçant dans le plan, x et y ses cordonnées cartésiennes par rapport à deux axes rectan-

gulaires Ox, Oy; r et θ ses coordonnées polaires, O étant le pôle et Ox l'axe polaire (*fig.* 3). On a

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Fig. 3.



Les projections de la vitesse de M sur Ox et Oy sont donc

$$x' = r'\cos\theta - r\sin\theta.\theta' = r'\cos\theta + r\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\theta',$$

$$y' = r'\sin\theta + r\cos\theta.\theta' = r'\sin\theta + r\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\theta'.$$

La deuxième forme sous laquelle on a mis ces formules montrent de suite que le vecteur vitesse de M peut se décomposer en deux vecteurs :

1° Un vecteur porté par l'axe Or, faisant l'angle θ avec Ox, et de valeur algébrique r' sur cet axe;

2° Un vecteur porté par l'axe Op, faisant l'angle $+\frac{\pi}{2}$ avec Or, et de valeur algébrique $r\theta'$ sur cet axe.

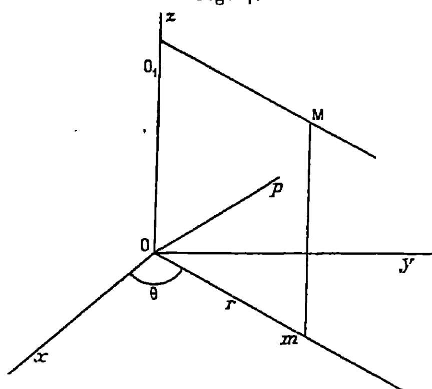
Projections de la vitesse en coordonnées semi-polaires. — Soient (r, θ, z) les coordonnées semi-polaires de M, (x, y, z) ses coordonnées cartésiennes dans un système de coordonnées rectangulaires (*fig.* 4). On a les relations

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z.$$

Pour avoir la vitesse du point M, on pourrait dériver ces

formules comme ci-dessus. Il est plus simple de se servir des résultats antérieurs. Soient m la projection de M sur le plan

Fig. 4.



xOy, O_1 la projection de M sur l'axe Oz. Les coordonnées polaires de m dans le plan xOy sont r et θ.

D'après ce qu'on a vu ci-dessus, le vecteur vitesse de m se décompose en deux autres : l'un porté sur Or, et de valeur r'; l'autre, sur Op, de valeur $r\theta'$. Comme la vitesse de m est la projection sur le plan xOy de la vitesse de M, les deux vecteurs précédents sont les composantes de la vitesse de M sur Or et Op. De même, la composante de la vitesse de M sur Oz est égale à la vitesse de O_1, c'est-à-dire z'.

Vitesse aréolaire. — Soit un point M se déplaçant dans un plan, et défini par ses coordonnées polaires (r, θ). Soit M_0 sa position initiale à l'instant t_0, et soit $\mathcal{A}$ l'aire balayée par le rayon vecteur depuis la position initiale OM_0 jusqu'à la position actuelle OM(*fig.* 5), $\mathcal{A}$ est d'ailleurs comptée avec son signe, qui est celui-ci de $\theta - \theta_0$.

On appelle *vitesse aréolaire* du point M la quantité $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$. Cette quantité s'exprime aisément en fonction des coordonnées

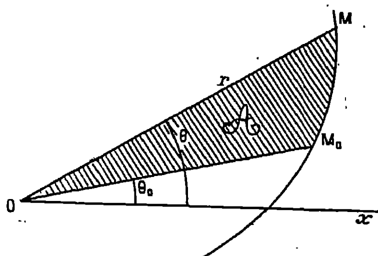
de M. On a en effet

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx),$$

d'où

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}(xy' - yx').$$

Fig. 5.



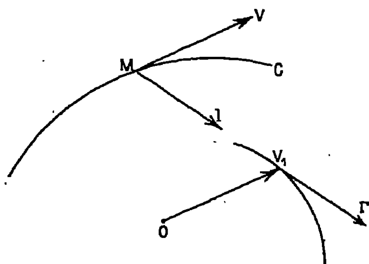
La seconde forme donnée à cette formule montre que la vitesse aréolaire de M n'est autre que le moment du vecteur $\frac{\vec{V}}{2}$ par rapport au point O.

Le mouvement de M est dit obéir à la *loi des aires* si $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ reste constant pendant le mouvement.

Accélération d'un point. — Soient M un point mobile, C sa trajectoire, $\overrightarrow{MV}$ son vecteur vitesse (*fig.* 6). Par un point fixe O, menons un vecteur $\overrightarrow{OV_1}$ équipollent à $\overrightarrow{MV}$. Lorsque le point M décrit sa trajectoire C, le point V_1 se déplace. La courbe décrite par V_1 est appelée *indicatrice des vitesses* ou *Hodographe* du mouvement. Lorsque le mouvement de M est connu, celui de V_1 est parfaitement déterminé. En particulier, le vecteur vitesse Γ du point V_1 dépend uniquement du mouvement de M. Ce vecteur, qu'il est intéressant de considérer dans l'étude du mouvement de M, est appelé vecteur *accélé-*

ration du point M. Il faut remarquer qu'un changement de l'unité de temps multipliant $\vec{V}$ par T^{-1} transforme l'hodographe

Fig. 6.



en une courbe homothétique dans le rapport T^{-1}, et multiplie par suite Γ par T^{-2}.

Si l'on se reporte à la construction par laquelle on a obtenu le vecteur Γ, on voit que le cône décrit par la droite OV_1 passe par l'indicatrice sphérique de la courbe C. Le plan tangent à ce cône est donc parallèle au plan osculateur en M à la courbe C.

Si donc on transporte l'origine du vecteur Γ en M, on voit que le vecteur $\overrightarrow{M\Gamma}$ est dans le plan osculateur en M à C.

Si l'on rapporte l'espace à trois axes de coordonnées rectangulaires, si x, y, z sont les coordonnées de M, celles du point V_1 sont donc x', y', z' à des constantes additives près. Le vecteur Γ a donc pour composantes

$$x'' = \frac{d^2 x}{dt^2}, \qquad y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}, \qquad z'' = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

L'accélération $\vec{\Gamma}$ est la dérivée géométrique du vecteur $\overrightarrow{OV_1}$, ou encore du vecteur $\overrightarrow{MV}$. Comme celui-ci est la dérivée géométrique du vecteur $\overrightarrow{M}$, on peut dire encore que $\vec{\Gamma}$ est la

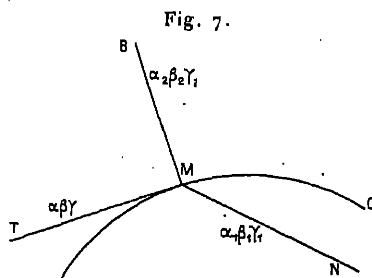
dérivée seconde géométrique du vecteur $\overrightarrow{M}$, dérivée qu'on notera $\overrightarrow{M}''$.

THÉORÈME. — *L'accélération de la projection d'un point sur un plan (ou sur un axe) est la projection sur ce plan (ou cet axe) de l'accélération du point de l'espace considéré.*

La démonstration est la même que pour le théorème analogue relatif aux vitesses.

Composantes de l'accélération dans le trièdre de Frenet. — Rappelons brièvement la définition du trièdre de Frenet en un point d'une courbe C (*fig.* 7). Un sens de parcours étant

Fig. 7.



choisi sur C, le trièdre de Frenet est un trièdre trirectangle de sommet M, dont les demi-axes positifs sont :

La demi-tangente positive MT;
La demi-normale positive MN (dirigée vers le centre de courbure);
La demi-binormale MB choisie de sorte que le trièdre MTNB ait le même sens que le trièdre de coordonnées.

Ceci posé, si α, β, γ sont les cosinus directeurs de MT; α_1, β_1, γ_1 ceux de MN; α_2, β_2, γ_2 ceux de MB, on a entre ces quantités, leurs dérivées par rapport à l'arc s, et les rayons de courbure R et de torsion T, les relations suivantes connues

sous le nom de formules de Frenet :

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha_1}{R},\qquad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta_1}{R},\qquad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma_1}{R};$$

$$\frac{d\alpha_2}{ds}=\frac{\alpha_1}{T},\qquad \frac{d\beta_2}{ds}=\frac{\beta_1}{T},\qquad \frac{d\gamma_2}{ds}=\frac{\gamma_1}{T};$$

$$\frac{d\alpha_1}{ds}=-\frac{\alpha}{R}-\frac{\alpha_2}{T},\qquad \frac{d\beta_1}{ds}=-\frac{\beta}{R}-\frac{\beta_2}{T},\qquad \frac{d\gamma_1}{ds}=-\frac{\gamma}{R}-\frac{\gamma_2}{T}.$$

Ceci posé, on a

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}=\alpha v,\qquad \frac{dy}{dt}=\beta v,\qquad \frac{dz}{dt}=\gamma v,$$

v désignant la valeur algébrique du vecteur vitesse sur MT. Pour avoir les composantes de l'accélération, dérivons. Il vient

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d\alpha}{dt}v+\alpha\frac{dv}{dt}=v^2\frac{d\alpha}{ds}+\alpha\frac{dv}{dt}=\frac{v^2}{R}\alpha_1+\alpha\frac{dv}{dt},$$

d'après le premier groupe des formules de Frenet.

On a de même

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{v^2}{R}\beta_1+\beta\frac{dv}{dt},\qquad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{v^2}{R}\gamma_1+\gamma\frac{dv}{dt}.$$

L'examen de ces formules montre de suite que le vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ se décompose en deux autres :

1° Un vecteur $\vec{\Gamma}_n$ porté par MN et dont la grandeur algébrique est $\frac{v^2}{R}$;

2° Un vecteur $\vec{\Gamma}_t$ porté par MT et dont la grandeur algébrique est $\frac{dv}{dt}$.

En particulier, on voit que $\vec{\Gamma}_n$ est toujours dirigé vers le centre de courbure.

Cas particuliers. — 1° Si $v=\frac{ds}{dt}=$ const., $\frac{dv}{dt}=0$, l'accélé-

ration est constamment normale à la courbe, et réciproquement;

2° Si la courbe C devient une droite, R est infini, l'accélération normale est nulle. Réciproquement, si $\frac{v^2}{R} = 0$, il faut que R soit infini, donc que C soit une droite.

Composantes de l'accélération en coordonnées polaires dans le plan. — Soit M le point mobile, de coordonnées polaires r et θ (*fig.* 3). On a vu que l'on a

$$x' = r'\cos\theta + r\theta'\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y' = r'\sin\theta + r\theta'\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Les composantes de l'accélération sont donc

$$x'' = r''\cos\theta + 2r'\theta'\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + r\theta''\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - r\theta'^2\cos\theta,$$

$$y'' = r''\sin\theta + 2r'\theta'\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + r\theta''\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - r\theta'^2\sin\theta,$$

ou

$$x'' = (r'' - r\theta'^2)\cos\theta + (2r'\theta' + r\theta'')\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = (r'' - r\theta'^2)\sin\theta + (2r'\theta' + r\theta'')\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

ce qui montre que le vecteur accélération se décompose en deux autres :

Sur Or, le vecteur $r'' - r\theta'^2$;
Sur Op, le vecteur $2r'\theta' + r\theta''$.

On en déduit les composantes de l'accélération d'un point de l'espace en coordonnées semi-polaires :

$$\Gamma_r = r'' - r\theta'^2, \qquad \Gamma_p = 2r'\theta' + r\theta'', \qquad \Gamma_z = z''.$$

En particulier, si l'accélération passe constamment par le point O, on a

$$2r'\theta' + r\theta'' = 0,$$

ce qui s'écrit aussi

$$\frac{1}{r}[2rr'\theta' + r^2\theta''] = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta') = 0$$

et réciproquement. La vitesse aréolaire est alors constante, car $r^2\theta'$ est constant ; le mouvement obéit à la loi des aires.

Étude de quelques mouvements simples. — I. *Mouvement rectiligne uniforme.* — La trajectoire est une droite, et l'abscisse du point mobile M varie suivant la loi $x = at + x_0$. La vitesse est donc $v = x' = a$. C'est une constante. L'accélération est nulle. Toutes ces propriétés caractérisent inversement le mouvement rectiligne uniforme. En effet, si le vecteur vitesse est invariable, la tangente à la trajectoire reste parallèle à une direction fixe, ce qui montre que la trajectoire est rectiligne ; de plus, comme le vecteur vitesse a une grandeur constante, l'abscisse du point mobile varie linéairement avec le temps. Si l'accélération est nulle, l'hodographe se réduit à un point, le vecteur vitesse est invariable et l'on est ramené au cas précédent.

II. *Mouvement rectiligne uniformément varié.* — La trajectoire est une droite, et l'abscisse du point varie suivant la loi

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + x_0,$$

où γ, v_0, x_0 sont des constantes.

La vitesse est $v = \gamma t + v_0$ et l'accélération $\gamma = \gamma$. C'est donc une constante.

III. *Mouvement circulaire uniforme.* — La trajectoire du point est un cercle (*fig.* 8). De plus l'arc $\widehat{AM}$, compté à partir d'une origine fixe A sur le cercle, varie suivant la loi

$$s = vt + s_0,$$

v et s_0 étant des constantes.

Le vecteur vitesse a pour grandeur $\frac{ds}{dt} = v$. Sa grandeur est donc constante. L'accélération tangentielle est

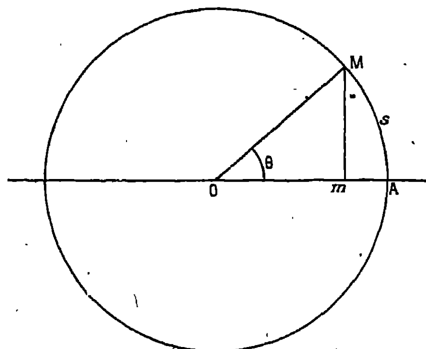
$$\Gamma_t = \frac{dv}{dt} = 0.$$

L'accélération normale est égale à

$$\Gamma_n = \frac{v^2}{R} = \text{const.},$$

R désignant le rayon du cercle.

Fig. 8



Soit θ l'angle polaire de M, l'axe polaire étant OA. Si l'on pose $\theta_0 = \frac{s_0}{R}$, on a

$$\theta = \frac{v}{R} t + \theta_0.$$

Posons $\frac{v}{R} = \omega$, on a

$$\theta = \omega t + \theta_0.$$

ω est la *vitesse angulaire* du point M sur le cercle. Plus généralement, dans un mouvement circulaire quelconque, on appelle « vitesse angulaire de M » la quantité $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Cette définition coïncide bien avec la précédente dans le cas du mouvement circulaire uniforme. En introduisant cette quan-

tité ω, on a

$$v = \omega R, \qquad \Gamma_n = \omega^2 R.$$

On appelle *période* du mouvement circulaire uniforme le temps T qui s'écoule entre deux passages consécutifs du mobile dans une même position. On a donc

$$\omega T = 2\pi, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

IV. *Mouvement oscillatoire simple.* — Considérons un point M décrivant un cercle d'un mouvement uniforme, et soit m sa projection sur l'axe polaire OA. Le point m a sur cet axe une abscisse

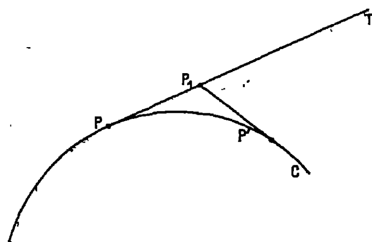
$$x = R\cos\theta = R\cos(\omega t + \theta_0).$$

Lorsque t varie, cette abscisse reste comprise entre $-R$ et $+R$. La vitesse et l'accélération de m sont les projections sur OA de celles de M. En particulier, l'accélération de m est égale à $-\omega^2 x$, comme on pourrait d'ailleurs le voir directement.

Le mouvement de M étant périodique, il en est de même de celui de m; la période est d'ailleurs la même, c'est $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Déviation d'un mouvement. — Soit un mobile décrivant une trajectoire C, et se trouvant à l'instant t au point P, avec

Fig. 9.



une vitesse V. A l'instant $t + dt$, il se trouve en un point P' (*fig.* 9). Si le point se déplaçait d'un mouvement uniforme

sur la tangente en P à C, à partir de l'instant t, et avec la vitesse $\vec{V}$, il se trouverait à l'instant $t + dt$, en P_1 sur la tangente PT, et l'on aurait

$$\overrightarrow{PP_1} = \vec{V}\, dt.$$

Ce mouvement, qui amène P en P_1, est dit mouvement rectiligne uniforme tangent au mouvement considéré à l'instant t.

Considérons le vecteur $\overrightarrow{P_1P'}$. Lorsque dt est infiniment petit, c'est aussi un infiniment petit. Cherchons sa partie principale, qu'on appelle *déviation* du mouvement au point P.

Projetons l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{P_1P'} = \overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{PP_1}.$$

Soient Δx, Δy, Δz les projections de $\overrightarrow{PP'}$.

Celles de $\overrightarrow{PP_1}$ sont

$$x'\,dt, \quad y'\,dt, \quad z'\,dt.$$

Donc celles de $\overrightarrow{P_1P'}$ sont

$$\Delta x - x'\,dt, \quad \Delta y - y'\,dt, \quad \Delta z - z'\,dt.$$

Or, d'après la formule de Taylor, on a

$$\Delta x = x(t + dt) - x(t) = x'\,dt + \frac{1}{2!}x''\,dt^2 + x'''(t + \theta\,dt)\frac{dt^3}{3!}.$$

Donc

$$\Delta x - x'\,dt = x''\frac{dt^2}{2} + x'''(t + \theta\,dt)\frac{dt^2}{3!}, \qquad |\theta| < 1.$$

La partie principale de $\Delta x - x'\,dt$ est donc $x''\dfrac{dt^2}{2}$.

Les parties principales des deux autres projections sont de même

$$y''\frac{dt^2}{2} \quad \text{et} \quad z''\frac{dt^2}{2}.$$

On voit donc que si $\vec{\gamma}$ désigne le vecteur accélération, on a

$$\vec{\gamma} = \lim_{dt=0} \frac{\overrightarrow{P_1 P'}}{\frac{dt^2}{2}}.$$

On peut encore dire que la déviation mesure la quantité dont le mouvement s'écarte du mouvement rectiligne uniforme tangent à l'instant t. En particulier, la déviation n'est constamment nulle que si γ est constamment nulle, c'est-à-dire si le mouvement est un mouvement rectiligne uniforme.

Unités. — Pour qu'on puisse représenter la vitesse et l'accélération par des vecteurs, comme on l'a fait jusqu'ici, il faut que l'unité de temps soit choisie une fois pour toutes, car ces grandeurs ne sont pas homogènes à des longueurs, comme nous allons le voir en cherchant leur dimension.

L'unité de vitesse est, par définition, la vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme dans lequel l'unité de longueur est parcourue pendant l'unité de temps. Si x est l'abscisse d'un tel mouvement, comptée à partir du point où passe le mobile pour $t = 0$, on a

$$v = \frac{x}{t},$$

x et t étant exprimés avec de certaines unités. Si l'on change d'unités pour x et t, soient

$$x' = x\mathrm{L}, \qquad t' = t\mathrm{T}$$

les nouvelles mesures de l'abscisse et du temps. La nouvelle mesure de la vitesse est

$$v' = \frac{x'}{t'} = \frac{x\mathrm{L}}{t\mathrm{T}} = v\mathrm{LT}^{-1}.$$

La dimension d'une vitesse est donc LT^{-1}.

Considérons un mouvement uniformément varié. On peut supposer, en choisissant convenablement l'origine des temps, que $v = \gamma t$.

L'unité d'accélération est l'accélération d'un tel mouvement dans lequel la variation de la vitesse pendant l'unité de temps est égale à l'unité de vitesse.

On voit, de la même manière que pour la vitesse, que la dimension d'une accélération est LT^{-2}.

Cherchons enfin la dimension d'une vitesse angulaire. Par définition, l'unité de vitesse angulaire est la vitesse angulaire d'un mouvement circulaire uniforme dans lequel l'unité d'angle est balayée dans l'unité de temps. Dans un tel mouvement, par un choix convenable de l'origine des temps, on a

$$\theta = \omega t, \qquad \omega = \frac{\theta}{t}.$$

Comme un angle a pour dimension 1, on voit que ω a pour dimension T^{-1}.

CHAPITRE II.

CINÉMATIQUE DU CORPS SOLIDE. GÉNÉRALITÉS. ÉTUDE DES VITESSES ET DES ACCÉLÉRATIONS.

Préliminaires. — On dit qu'un système de points S se déplace comme un corps solide lorsque la distance de deux quelconques de ses points reste invariable pendant le mouvement.

Si l'on suppose, ce qui est le cas général, que les points de S ne sont pas tous situés sur une même droite, on sait qu'il suffit de se donner la position de trois points de S non en ligne droite pour que la position de tout point de S soit parfaitement déterminée.

Considérons une position particulière S_0 du solide S, et soit M_0 un point de l'espace n'appartenant pas par définition à S_0.

On peut considérer ce point comme appartenant à S_0, à condition que si ce point est en M à l'instant t, la position du point M par rapport à S soit la même que celle de M_0 par rapport à S_0.

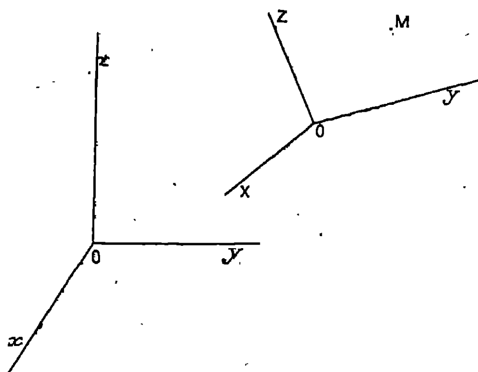
On voit donc qu'on est amené de cette manière à concevoir un espace mobile entraîné par le solide S. Inversement, si l'on se donne la position de S dans cet espace, et si l'on connaît le mouvement de cet espace, le mouvement de S sera parfaitement déterminé.

La manière la plus naturelle et la plus commode de définir le mouvement d'un espace mobile est de se donner le mouvement d'un trièdre de coordonnées choisi dans cet espace.

Nous supposerons donc désormais qu'on se donne le mou-

vement d'un trièdre de coordonnées trirectangle OXYZ par rapport à l'espace fixe rapporté à un autre trièdre de coordonnées *oxyz* (*fig.* 10). Comme la position de OXYZ par rap-

Fig. 10.



port à *oxyz* dépend de six paramètres indépendants, cela revient à se donner ces six paramètres en fonction du temps.

L'objet de la Cinématique du corps solide est de déduire du mouvement du trièdre mobile OXYZ celui de tout point M invariablement lié à ce trièdre, c'est-à-dire dont les coordonnées X, X, Z, par rapport à ce trièdre, sont constantes.

Avant d'entreprendre cette étude, précisons les notations dont nous aurons à faire usage.

Nous distinguerons en général un vecteur $\vec{V}$ d'une quantité scalaire par la flèche qui le surmonte, sauf dans les cas où aucune ambiguïté n'est à craindre.

Le produit d'un vecteur $\vec{V}$ par un scalaire a s'écrit $a.\vec{V}$.

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ se note $(V.V')$, la parenthèse ( ) étant réservée exclusivement pour cet usage toutes les fois qu'on aura à écrire les égalités vectorielles.

Enfin le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ s'écrira

$[\vec{V}.\vec{V'}]$, ou plus simplement $\overrightarrow{VV'}$ quand il n'y aura pas de confusion possible avec le produit d'un vecteur et d'un scalaire.

Ceci posé, définissons d'abord les paramètres servant à fixer la position du trièdre OXYZ.

Il suffit, pour avoir la position de OXYZ, de connaître d'abord la position du point O, ce qui revient à connaître le vecteur $\overrightarrow{oO}$ (ou plus simplement $\vec{O}$), ou encore les composantes de ce vecteur, c'est-à-dire les coordonnées x_0, y_0, z_0 de O dans le trièdre $oxyz$.

Ensuite, pour avoir la position de OXYZ autour de O, on peut se donner trois vecteurs unités $\overrightarrow{Oi}$, $\overrightarrow{Oj}$, $\overrightarrow{Ok}$ portés respectivement par OX, OY, OZ (dans la suite, nous désignerons ces trois vecteurs par i, j, k; les flèches ne sont pas nécessaires, car ces lettres ne sont employées qu'à cet usage). On peut encore, ce qui revient au même, se donner les composantes de i, j, k sur $oxyz$, c'est-à-dire les cosinus directeurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de OX, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ de OY, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ de OZ.

Ceci posé, on a l'égalité vectorielle qui définit la position de M par rapport à $oxyz$:

$$\overrightarrow{oM} = \vec{M} = \vec{O} + Xi + Yj + Zk \tag{1}$$

où, ce qui revient au même, les trois égalités obtenues en projetant cette égalité vectorielle sur les axes $oxyz$:

$$\begin{cases} x = x_0 + X\alpha_1 + Y\beta_1 + Z\gamma_1, \\ y = y_0 + X\alpha_2 + Y\beta_2 + Z\gamma_2, \\ z = z_0 + X\alpha_3 + Y\beta_3 + Z\gamma_3. \end{cases} \tag{2}$$

Remarquons d'ailleurs que les douze paramètres qui entrent dans les relations précédentes (trois coordonnées de O et neuf cosinus directeurs) ne sont pas indépendants, puisque la position de OXYZ ne dépend que de six paramètres. Les neuf cosinus directeurs vérifient en effet les six relations

indépendantes suivantes :

$$(i.i) = 1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \qquad (i.j) = 0 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3,$$
$$(j.j) = 1 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2, \qquad (j.k) = 0 = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3,$$
$$(k.k) = 1 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2, \qquad (k.i) = 0 = \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3.$$

On a d'ailleurs d'autres relations encore, déduites de celles-là, par exemple

$$i = \overrightarrow{jk}, \qquad j = \overrightarrow{ki}, \qquad k = \overrightarrow{ij}$$

et les relations déduites de ces trois égalités vectorielles par projection, c'est-à-dire

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_1$$

et les égalités analogues.

Mentionnons enfin la relation

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1,$$

qui est aussi une conséquence des précédentes.

Signalons encore, avant de commencer l'étude des mouvements des solides, la propriété suivante, qui caractérise ces mouvements :

Théorème. — *Pour qu'un système matériel se déplace comme un corps solide, il faut et il suffit que les projections, sur la droite qui les joint, des vitesses de deux points quelconques* M_1, M_2, *appartenant au système, soient égales.*

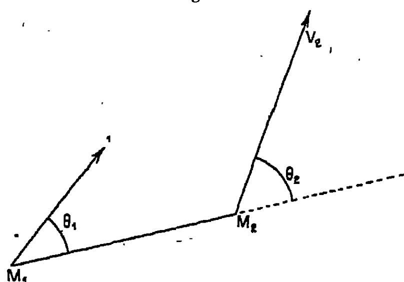
1° *La condition est nécessaire.* — En effet, soient (x_1, y_1, z_1) les coordonnées de M_1, (x_2, y_2, z_2) celles de M_2 (*fig.* 11). On a par hypothèse

$$\mathsf{S}(x_2 - x_1)^2 = \text{const.}$$

(S est le signe de sommation de Lamé, s'étendant aux trois coordonnées), d'où, en dérivant par rapport au temps,

$$\mathbf{S}(x_2-x_1)(x_2'-x_1')=0$$

Fig. 11.



ou encore

$$\mathbf{S}(x_2-x_1)x_2'=\mathbf{S}(x_2-x_1)x_1',$$

ce qui s'écrit sous forme vectorielle

$$(\overrightarrow{M_1M_2}.V_2)=(\overrightarrow{M_1M_2}.V_1)$$

ou encore

$$V_2\cos\theta_2=V_1\cos\theta_1,$$

ce qui démontre la proposition.

2° *La condition est suffisante.* — Il suffit pour le voir de reprendre les égalités précédentes en sens inverse.

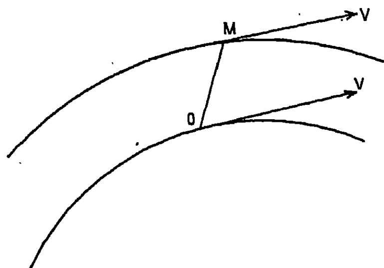
Avant d'aborder l'étude du mouvement général d'un corps solide, nous allons d'abord considérer quelques mouvements particuliers. Les propriétés de ces mouvements nous serviront pour le mouvement général.

I. **Mouvement de translation.** — On dit que le mouvement d'un corps solide est un *mouvement de translation* si, pendant le mouvement, un vecteur quelconque de l'espace mobile reste équipollent à lui-même.

Cette propriété définit parfaitement le mouvement du solide dès que l'on connaît le mouvement d'un de ses points O.

En effet, soit M un point quelconque du corps (*fig.* 12).

Fig. 12.



Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ restant équipollent à lui-même, la trajectoire de M se déduit de celle de O par la translation géométrique $\overrightarrow{OM}$.

Étudions la distribution des vitesses. Comme la vitesse de M est le vecteur $\overrightarrow{M}'$, on a, en dérivant la formule fondamentale (1),

$$\overrightarrow{M'} = \overrightarrow{O'} + X i' + Y j' + Z k'. \tag{3}$$

Or ici les vecteurs i, j, k restent équipollents à eux-mêmes. Donc

$$i' = j' = k' = 0 \qquad \text{et, par suite,} \qquad \overrightarrow{M'} = \overrightarrow{O'}.$$

Donc les vecteurs vitesses de tous les points du solide, à un instant donné, sont équipollents.

Cette propriété est caractéristique du mouvement de translation. En effet, si l'on a $\overrightarrow{M'} = \overrightarrow{O'}$, on en tire, d'après (3),

$$X i' + Y j' + Z k' = 0.$$

Comme ceci a lieu quel que soit le point M, on en tire

$$i' = j' = k' = 0,$$

et comme ceci a lieu à tout instant t, on en déduit que les vecteurs i, j, k restent équipollents à eux-mêmes. De là, on déduit que tout vecteur du corps reste équipollent à lui-même, car un tel vecteur peut s'écrire $Xi + Yj + Zk$. La propriété est donc démontrée.

Calculons encore l'accélération $\overrightarrow{M''}$ du point M. On a, en dérivant l'égalité $\overrightarrow{M'} = \overrightarrow{O'}$,

$$\overrightarrow{M''} = \overrightarrow{O''}.$$

Donc les vecteurs accélérations de tous les points du solide, à un instant donné, sont équipollents. Mais cette propriété n'est pas, comme la précédente, caractéristique du mouvement de translation.

Remarquons encore que, d'après la définition du mouvement de translation, on peut choisir comme axes du trièdre mobile des axes OXYZ équipollents à $oxyz$, car ces axes resteront équipollents à $oxyz$ pendant le mouvement. Les formules (2) s'écrivent alors

$$x = x_0 + X,$$
$$y = y_0 + Y,$$
$$z = z_0 + Z.$$

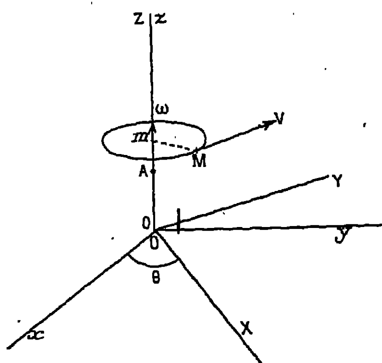
II. **Mouvement de rotation.** — On dit qu'un corps solide a un *mouvement de rotation*, si deux points de l'espace mobile sont fixes pendant le mouvement. Ceci entraîne de suite que tous les points de la droite qui joint les deux points donnés restent également fixes pendant le mouvement. Cette droite est appelée l'*axe de rotation* du corps.

Pour définir la position du corps, il suffit évidemment de se donner la position d'un point non situé sur l'axe de rotation, ou, ce qui revient au même, celle du demi-plan qui contient ce point et l'axe. On fixe ordinairement cette position par l'angle θ du demi-plan mobile avec un demi-plan fixe passant

par l'axe de rotation et arbitrairement choisi, l'angle θ étant compté avec un sens positif fixé à l'avance.

En particulier, prenons comme axe oz du trièdre fixe l'axe de rotation, arbitrairement orienté ; le point o sera arbitrairement choisi sur cette droite, ainsi que le demi-plan zox, l'axe oy étant pris de manière que le trièdre soit direct. Pour le trièdre mobile, nous pouvons supposer que le point O est confondu avec o, et l'axe OZ avec oz. Le trièdre OXYZ sera pris direct, et sa position définie par l'angle θ, compté de ox

Fig. 13.



vers oy, que fait ox avec OX (*fig.* 13). Avec ces conventions, les formules (2) s'écrivent

$$
\begin{aligned}
x &= X\cos\theta - Y\sin\theta,\\
y &= X\sin\theta + Y\cos\theta,\\
z &= Z.
\end{aligned}
$$

On voit immédiatement que la trajectoire d'un point quelconque M du corps solide est un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre est le point m, pied de la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe.

Pour étudier la distribution des vitesses dans le corps solide, considérons un vecteur $\vec{\omega}$ porté par oz, et dont la valeur algé-

brique sur cet axe est $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Ce vecteur est dit *vecteur rotation* à l'instant t. (La rotation est dite uniforme si $\frac{d\theta}{dt}$ est constant, c'est-à-dire si $\vec{\omega}$ est un vecteur fixe.) Nous pouvons déjà remarquer que son sens indique le sens du mouvement, car si $\omega > 0$, le corps tourne de droite à gauche, et si $\omega < 0$, de gauche à droite.

De plus, soit V la vitesse de M. V est perpendiculaire au plan Moz. Sa grandeur est

$$V = \omega . \overline{mM}.$$

De plus, quel que soit le sens de $\vec{\omega}$, le vecteur $\vec{V}$ est dextrorsum par rapport à $\vec{\omega}$ (ou encore, si l'on transporte le vecteur $\vec{\omega}$ en M, le trièdre $MVm\omega$ est direct). Ceci montre donc que le vecteur $\vec{V}$ *est le moment de* $\vec{\omega}$ *par rapport à* M, ou encore qu'on a

$$\vec{V} = [\vec{\omega} . \overrightarrow{OM}].$$

Cette égalité vectorielle va nous permettre de trouver les composantes de la vitesse de M par rapport à un trièdre quelconque $o_1x_1y_1z_1$ (qui peut être, soit fixe par rapport à $oxyz$, soit fixe par rapport à OXYZ, soit mobile par rapport à ces deux trièdres).

Donnons au vecteur $\vec{\omega}$ une origine A fixe sur l'axe de rotation. Soient (ξ_1, η_1, ζ_1) les coordonnées de A dans le système d'axes $o_1x_1y_1z_1$, (p, q, r) les composantes de $\vec{\omega}$, (ξ, η, ζ) les coordonnées de M, (V_ξ, V_η, V_ζ) les composantes de $\vec{V}$. On a les formules

$$V_\xi = q(\zeta - \zeta_1) - r(\eta - \eta_1),$$
$$V_\eta = r(\xi - \xi_1) - p(\zeta - \zeta_1),$$
$$V_\zeta = p(\eta - \eta_1) - q(\xi - \xi_1).$$

En particulier :

1° Si l'on prend comme axes $o_1 x_1 y_1 z_1$ les axes $oxyz$, on peut supposer que A est en o, alors

$$\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 0;$$
$$p = q = 0, \qquad r = \omega;$$
$$\xi = x, \qquad \eta = y, \qquad \zeta = z;$$

d'où

$$V_x = x' = -\omega y,$$
$$V_y = y' = \omega x,$$
$$V_z = z' = 0,$$

qu'on aurait pu déduire immédiatement des formules donnant x, y, z.

2° Si l'on suppose les axes $o_1 z_1 y_1 z_1$ liés au solide qui se déplace, on peut toujours supposer que o_1 et A sont en O. Alors

$$\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 0;$$

posons.

$$\xi = X, \qquad \eta = Y, \qquad \zeta = Z,$$

on a

$$V_X = q Z - r Y,$$
$$V_Y = r X - p Z,$$
$$V_Z = p Y - q X;$$

si, plus particulièrement, ces axes sont les axes OXYZ choisis antérieurement, on a

$$p = q = 0, \qquad r = \omega;$$
$$V_X = -\omega Y,$$
$$V_Y = \omega X,$$
$$V_Z = 0.$$

Étudions maintenant la distribution des accélérations.

L'accélération tangentielle $\overrightarrow{\gamma_T}$ est perpendiculaire au plan Moz et a pour valeur

$$\frac{dv}{dt} = \overline{mM} . \omega'.$$

On voit aisément que $\overrightarrow{\gamma_T}$ est dextrorsum par rapport au vecteur $\overrightarrow{\omega'}$. On a donc l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{\gamma_T} = \left[\overrightarrow{\omega'}.\overrightarrow{OM}\right].$$

Remarquons que $\overrightarrow{\omega'}$ est ici porté par la même droite fixe que $\overrightarrow{\omega}$.

L'accélération normale γ_N est dirigée de M vers m et a pour valeur $|\omega|^2.mM$, donc vectoriellement on a

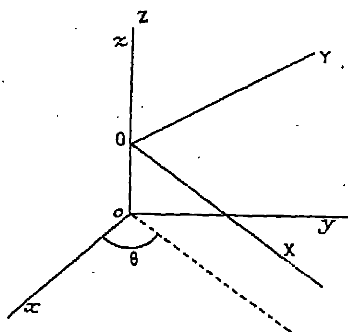
$$\overrightarrow{\gamma_N} = -|\omega|^2.\overrightarrow{mM},$$

d'où, pour l'accélération totale $\overrightarrow{\gamma}$,

$$\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\gamma_T} + \overrightarrow{\gamma_N} = \left[\overrightarrow{\omega'}.\overrightarrow{OM}\right] - |\omega|^2.\overrightarrow{mM}.$$

III. **Mouvement hélicoïdal.** — On dit que le mouvement d'un corps est un mouvement hélicoïdal, si, étant données deux positions de ce corps à deux instants arbitraires, on peut

Fig. 14.



passer de l'une à l'autre par un déplacement hélicoïdal d'axe fixe et de pas constant. Dans ce déplacement, la translation l est donc liée à la rotation θ par la relation

$$l = h\theta \qquad (h \text{ étant une constante}).$$

Nous prendrons comme trièdre mobile attaché au corps un trièdre direct OXYZ tel que O soit sur l'axe du mouvement, et que OZ soit confondu avec la direction positive de cet axe, direction choisie arbitrairement.

Comme trièdre fixe, nous prendrons, pour simplifier, une des positions du trièdre mobile. Pour définir la position du corps solide, nous prendrons comme variable l'angle θ que fait OX avec ox, θ étant compté de ox vers oy (*fig.* 14).

Si l est la cote de O dans le trièdre $oxyz$, on a

$$l = h\theta$$

d'après la définition du mouvement.

Les coordonnées d'un point M de l'espace mobile dans le trièdre $oxyz$ sont donc

$$\begin{aligned} x &= X\cos\theta - Y\sin\theta, \\ y &= X\sin\theta + Y\cos\theta, \\ z &= h\theta + Z. \end{aligned}$$

h est dit le *pas réduit* du mouvement hélicoïdal, $H = 2\pi h$ est le pas proprement dit.

Considérons un observateur traversé des pieds à la tête par l'axe du mouvement, le sens des pieds à la tête étant le sens du mouvement de O à un instant donné.

Si, pour cet observateur, la rotation du corps solide s'effectue de la droite vers la gauche, le mouvement est dit *dextrorsum*. Dans le cas contraire, le mouvement est dit *sinistrorsum*.

On voit de suite que la nature du mouvement dépend du signe de la constante h. Si $h > 0$, le mouvement est dextrorsum, et si $h < 0$, il est sinistrorsum. Si $h = 0$ le mouvement se réduit à une rotation.

Étudions la distribution des vitesses dans l'espace mobile. Les coordonnées x, y du point M ayant la même forme que dans le cas d'une rotation autour de oz, on a encore, en

posant $\omega = \frac{d\theta}{dt}$,

$$x' = -\omega y, \qquad y' = \omega x, \qquad z' = h\omega.$$

On voit donc qu'on peut décomposer le vecteur vitesse $\vec{V}$ en deux autres vecteurs : l'un, $\vec{V}_R$, de composantes $(-\omega y, \omega x, o)$; l'autre, $\vec{V}_T$, de composantes $(o, o, h\omega)$.

$\vec{V}_R$ serait la vitesse de M dans un mouvement de rotation autour de oz, la vitesse de rotation étant ω. De même $\vec{V}_T$ serait la vitesse de M dans un mouvement de translation parallèle à oz, de vitesse $h\omega$.

On aurait d'ailleurs ces résultats immédiatement en projetant le point M sur le plan xoy, d'une part, sur l'axe oz de l'autre.

Si l'on porte sur l'axe fixe oz un vecteur $\vec{\omega}$ de grandeur algébrique $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ sur cet axe, on aura, d'après ce qui a été vu pour le mouvement de rotation,

$$\vec{V}_R = [\vec{\omega}.\vec{AM}],$$

A étant un point du corps solide situé sur OZ (ce peut être O lui-même).

$\vec{\omega}$ s'appelle le *vecteur rotation à l'instant t.*

On aura aussi

$$\vec{V}_T = \vec{V}_A = h\vec{\omega}$$

($\vec{V}_A$ s'appelle le *vecteur translation à l'instant t*).

Donc

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + [\vec{\omega}.\vec{AM}].$$

Ceci permet, comme dans le cas d'un mouvement de rotation, de trouver les composantes de $\vec{V}_M$ dans un trièdre quelconque $o_1 x_1 y_1 z_1$. Les notations étant les mêmes que précé-

demment, on aura

$$V_\xi = hp + q(\zeta - \zeta_1) - r(\eta - \eta_1),$$
$$V_\eta = hq + r(\xi - \xi_1) - p(\zeta - \zeta_1),$$
$$V_\zeta = hr + p(\eta - \eta_1) - q(\xi - \xi_1).$$

En particulier, si l'on prend comme trièdre un trièdre OXYZ invariablement lié au corps, A étant en O, on aura

$$V_X = hp + qZ - rY,$$
$$V_Y = hq + rX - pZ,$$
$$V_Z = hr + pY - qX.$$

La formule donnant $\overrightarrow{V_M}$ peut encore s'interpréter autrement. On peut dire que $\overrightarrow{V_M}$ est *le moment résultant en* M *d'un système de vecteurs dont la résultante générale est* $\vec{\omega}$ *et dont le moment résultant en* A *est* $\overrightarrow{V_A}$.

L'étude des accélérations se fait de la même manière que celle des vitesses. On trouvera sans peine que l'on a

$$\overrightarrow{\Gamma_M} = \overrightarrow{\Gamma_R} + \overrightarrow{\Gamma_T} = \left[\vec{\omega}'.\overrightarrow{AM}\right] - |\omega|^2.\overrightarrow{mM} + h\overrightarrow{\omega'}.$$

Si ω est constant, le mouvement est uniforme. L'accélération se réduit alors à $-|\omega|^2.\overrightarrow{mM}$. Elle est constante et perpendiculaire à l'axe.

IV. **Mouvement général d'un corps solide.** — 1. ÉTUDE DES VITESSES A UN INSTANT DONNÉ. — Nous partirons, pour étudier la distribution des vitesses dans le corps, des deux formules fondamentales

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{O} + Xi + Yj + Zk, \tag{1}$$

$$\overrightarrow{M'} = \overrightarrow{O'} + \{Xi' + Yj' + Zk'\}. \tag{3}$$

Dans ce qui va suivre, nous chercherons à donner une forme géométrique indépendante des axes choisis à l'expression

entre { } de (3). Remarquons d'abord que le mouvement de O n'intervient plus dans cette accolade; on pourra donc, quand cela sera nécessaire, supposer le point O fixe, c'est-à-dire considérer un trièdre mobile *d'origine fixe, équipollent au trièdre mobile donné.* Nous allons *évaluer i', j', k' en fonction de i, j, k.*

On a évidemment l'identité suivante

$$(4) \qquad \frac{di}{dt} = i' = (i'.i).i + (i'.j).j + (i'.k).k,$$

qui exprime l'identité du vecteur i' avec la somme de ses projections.

Or, nous avons vu qu'on a les identités

$$(i.i) = 1, \qquad (i.j) = 0, \qquad (i.k) = 0,$$

qui donnent, par dérivation,

$$(i'.i) + (i.i') = 0$$

ou, comme $(i'.i) = (i.i')$,

$$(i'.i) = 0,$$

puis

$$(i'.j) + (i.j') = 0, \qquad (i'.k) + (k.i') = 0.$$

D'autre part, on a, en envisageant les *produits vectoriels*,

$$i = \overrightarrow{j.k}, \qquad j = \overrightarrow{k.i}, \qquad k = \overrightarrow{i.j};$$

en remplaçant i, j, k par ces valeurs, (4) devient

$$i' = (i'.j).\overrightarrow{k.i} + (i'.k).\overrightarrow{i.j}$$

ou, comme

$$\overrightarrow{ij} = -\overrightarrow{ji}, \qquad (i'.k) = -(k'.i),$$

$$i' = (i'.j).\overrightarrow{k.i} + (k'.i).\overrightarrow{j.i}.$$

Dans cette formule, on remarque que, à part le facteur i, qui entre à droite de chacun des produits vectoriels, le pre-

mier terme se déduit du deuxième, en faisant une permutation circulaire sur i, j, k. Si l'on effectuait encore cette permutation circulaire sur le premier terme, on aurait le terme

$$(j'.k).\overrightarrow{ii} = 0,$$

puisque $\overrightarrow{i.i} = 0$. On peut donc, pour donner plus de symétrie à la formule, ajouter ce terme nul au deuxième membre, et mettre en facteur, dans les trois produits, le vecteur i. Il vient donc pour i' le produit vectoriel suivant :

$$i' = \left[\left\{\overline{(i'.j)k + (j'.k)i + (k'.i)\vec{j}}\right\}.\vec{i}\right].$$

Comme la quantité entre { } est un vecteur fonction symétrique de i, j, k, il est évident qu'on aura, par un calcul analogue,

$$j' = \left[\left\{\overline{(i'.j)k + (j'.k)i + (k'.i)\vec{j}}\right\}.\vec{j}\right],$$
$$k' = \left[\left\{\overline{(i'.j)k + (j'.k)i + (k'.i)\vec{j}}\right\}.\vec{k}\right].$$

On voit donc que si l'on désigne par $\vec{\omega}$ le vecteur

$$\vec{\omega} = (j'.k)i + (k'.i)j + (i'.j)k,$$

on a les formules

$$i' = \overrightarrow{\omega.i},$$
$$j' = \overrightarrow{\omega.j},$$
$$k' = \overrightarrow{\omega.k},$$

qui font apparaître i', j' et k' *comme les produits vectoriels d'un même vecteur* ω *par les trois vecteurs* i, j, k ; d'où, en portant dans la formule (3),

$$\overrightarrow{M'} = \overrightarrow{O'} + X\overrightarrow{\omega i} + Y\overrightarrow{\omega j} + Z\overrightarrow{\omega k}$$

et, en mettant $\vec{\omega}$ en facteur dans les trois produits vectoriels

$$\overrightarrow{M'} = \overrightarrow{O'} + \left[\vec{\omega}.\left\{\overrightarrow{Xi + Yj + Zk}\right\}\right].$$

et comme, d'après (1),

$$Xi + Yj + Zk = \overrightarrow{OM},$$

on a finalement

$$\overrightarrow{M'} = \overrightarrow{O'} + [\vec{\omega}.\overrightarrow{OM}]$$

et, comme

$$\overrightarrow{O'} = \overrightarrow{V_0},$$

on a

$$\boxed{\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_0} + [\vec{\omega}.\overrightarrow{OM}].} \tag{5}$$

Nous retrouvons donc le résultat déjà trouvé dans deux cas particuliers : Si O est un point donné du corps, la vitesse d'un point quelconque M de l'espace mobile est le *moment résultant d'un système de vecteurs dont la résultante générale est* $\vec{\omega}$, *et le moment résultant en* O, $\overrightarrow{V_0}$.

Cette formule géométrique (5) permet, comme nous l'avons déjà fait dans les cas particuliers précédents, de trouver sans peine les projections de $\overrightarrow{V_M}$ sur un trièdre quelconque $O_1x_1y_1z_1$. Nous ne nous arrêterons pas à les écrire. Donnons seulement les composantes de $\overrightarrow{V_M}$ dans le trièdre mobile OXYZ.

Si ξ, η, ζ sont les composantes de $\overrightarrow{V_0}$; p, q, r, celles de $\vec{\omega}$, on aura

$$\left\{\begin{aligned} V_X &= \xi + qZ - rY, \\ V_Y &= \eta + rX - pZ, \\ V_Z &= \zeta + pY - qX. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

On pourrait aussi chercher les composantes de $\overrightarrow{V_M}$ dans le trièdre fixe $oxyz$, en fonction des coordonnées (x_0, y_0, z_0) de O, et des neuf cosinus. Une première méthode consisterait à reprendre sur les formules (2) le calcul fait plus haut vectoriellement.

On peut aussi projeter sur les axes $oxyz$ la formule (5).

Les composantes de $\overrightarrow{V_0}$ sont x'_0, y'_0, z'_0. Pour trouver celles

(P, Q, R) de $\vec{\omega}$, il suffit de se reporter à la formule qui donne ω.

On aura, en projetant sur ox,

$$P = (j'.k)\alpha_1 + (k'.i)\beta_1 + (i'.j)\gamma_1$$

et les deux formules analogues.

D'ailleurs

$$(j'.k) = \beta'_1\gamma_1 + \beta'_2\gamma_2 + \beta'_3\gamma_3.$$

Les deux autres produits scalaires s'expriment de la même façon.

On voit donc qu'il n'y aura pas de difficulté à obtenir, quand on le désirera, les projections de V_M sur $oxyz$.

Revenons maintenant à l'égalité vectorielle (5).

D'après une remarque faite au début du paragraphe, le vecteur $\vec{\omega}$ ne dépend *que de la direction des axes mobiles*, et non de leur origine. Si l'on prend donc une autre origine O', on aura encore

$$\vec{V_M} = \vec{V_{O'}} + \left[\vec{\omega}.\overrightarrow{O'M}\right].$$

Le vecteur $\vec{\omega}$ et la vitesse $\vec{V_0}$ d'un point O du corps définissent donc parfaitement la distribution des vitesses dans l'espace mobile à un instant donné.

Avant d'entreprendre l'étude approfondie de cette distribution, envisageons d'abord deux cas particuliers :

1° Supposons $\vec{\omega} = 0$. Alors $\vec{V_M} = \vec{V_0}$ quel que soit M. Les vitesses sont alors les mêmes *à cet instant* que dans une translation; on dit que le *mouvement est tangent à l'instant considéré, à un mouvement de translation*.

2° Supposons $V_0 = 0$. Alors

$$\vec{V_M} = \left[\vec{\omega}.\overrightarrow{OM}\right]$$

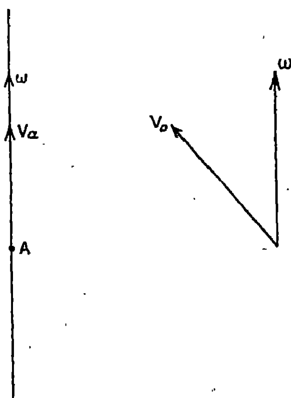
quel que soit M. Les vitesses sont les mêmes *en cet instant*

que dans un mouvement de rotation autour d'un axe passant par O. On dit que le *mouvement est tangent*, *à l'instant considéré*, *à un mouvement de rotation*.

Cas général. — Supposons $\omega \neq 0$ et $V_0 \neq 0$. D'après l'interprétation de la formule (5) donnée précédemment, la distribution des vitesses dans le corps solide dépend d'un système de vecteurs dont la résultante générale est $\vec{\omega}$ et le moment résultant en O, $\overrightarrow{V_0}$.

Or, d'après les propriétés connues des systèmes de vecteurs, comme $\vec{\omega} \neq 0$, $\overrightarrow{V_0} \neq 0$, le système admet un *axe central*, c'est-à-dire une droite telle qu'en tous ses points A les vecteurs $\vec{\omega}$ et $\overrightarrow{V_A}$ aient la même direction. Cette direction est

Fig. 15.



d'ailleurs celle de l'axe central Δ (*fig*. 15). Cet axe central est appelé l'AXE INSTANTANÉ *du mouvement à l'instant t*.

Si A est un point de Δ, la formule (5), où l'on prend A comme origine, s'écrit

$$\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_A} + [\vec{\omega} . \overrightarrow{AM}], \tag{6}$$

où $\vec{V}_A$ et $\vec{\omega}$ ont même direction Δ. Or, si l'on se reporte à l'étude du mouvement hélicoïdal, on voit par cette formule (6) que la distribution des vitesses à l'instant t est la même que dans un mouvement hélicoïdal d'axe Δ, dont la vitesse de translation est $\vec{V}_A$, et le vecteur rotation $\vec{\omega}$; ce mouvement est dit *mouvement hélicoïdal tangent, à l'instant t, au mouvement considéré.*

D'ailleurs, la vitesse de translation $\vec{V}_A$ de ce mouvement a un sens très simple; c'est la projection sur la direction de $\vec{\omega}$ de la vitesse $\vec{V}_0$ d'un point quelconque O du corps. En effet, on a, d'après (5),

$$\vec{V}_A = \vec{V}_0 + [\vec{\omega} . \vec{OA}].$$

D'où, comme le vecteur $[\vec{\omega} . \vec{OA}]$ est perpendiculaire à $\vec{\omega}$, on tire, en projetant sur la direction de $\vec{\omega}$,

$$\text{proj.} \vec{V}_A = \text{proj.} \vec{V}_0.$$

et comme $\vec{V}_A$ a la direction de $\vec{\omega}$,

$$\text{proj.} \vec{V}_A = \vec{V}_A,$$

ce qui démontre la proposition.

On peut se proposer, connaissant les composantes de $\vec{V}_0$ et de $\vec{\omega}$ sur trois axes de coordonnées quelconques, de trouver les équations de Δ dans ce système d'axes.

Faisons par exemple le calcul dans le système OXYZ.

Exprimons que $\vec{V}_A$ et $\vec{\omega}$ ont la même direction, A étant un point (X, Y, Z) du corps situé sur l'axe cherché. Les compo-

santes de $\overrightarrow{V_A}$ sont, avec les notations employées plus haut,

$$(V_A)_X = \xi + qZ - rY,$$
$$(V_A)_Y = \eta + rX - pZ,$$
$$(V_A)_Z = \zeta + pY - qX.$$

D'où les équations du lieu Δ :

$$\frac{\xi + qZ - rY}{p} = \frac{\eta + rX - pZ}{q} = \frac{\zeta + pY - qX}{r} = h.$$

Soit h la valeur commune de ces rapports. h est une constante, comme on le voit en multipliant haut et bas les rapports, le premier par p, le deuxième par q, le troisième par r, et ajoutant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux; il vient

$$h = \frac{p\xi + q\eta + r\zeta}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

On a d'ailleurs $\overrightarrow{V_A} = h\vec{\omega}$ d'après les équations mêmes qui donnent h. h est donc le pas du mouvement hélicoïdal tangent. $\vec{\omega}$ et h dépendant de t sont les caractéristiques du mouvement hélicoïdal tangent.

Si $\overrightarrow{V_A} = 0$, le mouvement tangent se réduit à une rotation.

On voit que la condition générale, pour qu'il en soit ainsi, est $h = 0$, ou

$$p\xi + q\eta + r\zeta = 0,$$

ce qui exprime que $\overrightarrow{V_0}$ et $\vec{\omega}$ sont perpendiculaires. Ceci se voit d'ailleurs de suite géométriquement, d'après la propriété établie ci-dessus, à savoir que $\overrightarrow{V_A}$ est la projection de $\overrightarrow{V_0}$ sur $\vec{\omega}$.

Cherchons s'il y a dans le corps des points dont la vitesse est nulle à l'instant considéré.

En général, si $\vec{\omega} \neq 0$ et $h \neq 0$, il n'y a pas de tels points, car la projection sur la direction de $\vec{\omega}$ de la vitesse d'un point quelconque du corps, étant égale à $h\omega$, n'est pas nulle.

Si $h = 0$, $\vec{\omega} \neq 0$, le mouvement tangent est une rotation ; les points de l'axe instantané ont une vitesse nulle, et ce sont les seuls.

Si $\vec{\omega} = 0$, $\vec{V}_0 \neq 0$, le mouvement tangent est une translation de vitesse non nulle, donc la vitesse d'aucun point n'est nulle.

Enfin si $\vec{\omega} = 0$, $\vec{V}_0 = 0$, le mouvement tangent est le repos, et tous les points de l'espace mobile ont à l'instant considéré une vitesse nulle.

L'étude que nous venons de faire nous renseigne donc complètement sur la *distribution des vitesses dans le corps à un instant donné*. Il suffit, pour connaître cette distribution, de se donner à l'instant t, *un point* A *de l'axe central, le vecteur* $\vec{\omega}$ *et le nombre* h.

Cette étude est en quelque sorte l'étude différentielle du mouvement. Nous verrons plus tard qu'on peut aller plus loin, et énoncer quelques résultats sur la manière dont le mouvement se déroule dans le temps, c'est-à-dire entreprendre l'étude intégrale du mouvement.

Bornons-nous pour le moment à signaler deux cas particuliers dans lesquels on peut avoir aisément des renseignements sur le mouvement :

1° *Un point du solide reste fixe pendant le mouvement.* — Ce point a donc une vitesse nulle. Ceci, d'après ce qu'on a vu ci-dessus, ne peut avoir lieu que si *l'axe instantané passe constamment par ce point, et si le mouvement instantané est à chaque instant une rotation.*

2° *Une droite du solide reste parallèle à elle-même.* — Prenons cette droite comme axe OZ du trièdre mobile.

Le vecteur k est constant. Donc $k' = 0$.

Comme

$$k' = \overrightarrow{\omega . k},$$

on en déduit, ou bien $\vec{\omega} = 0$, c'est-à-dire que le mouvement

est une translation, ou bien que $\vec{\omega}$ a la même direction que k, c'est-à-dire que l'axe instantané reste parallèle à la direction OZ.

2. Étude des accélérations. — Reprenons la formule (5)

$$\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_0} + \left[\vec{\omega}.\overrightarrow{OM}\right];$$

l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_M}$ étant la dérivée géométrique de $\overrightarrow{V_M}$, dérivons cette formule; on a

$$\overrightarrow{\Gamma_M} = \overrightarrow{\Gamma_0} + \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega}.\overrightarrow{OM}\right]$$

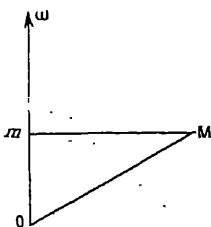
ou, d'après la formule de dérivation d'un produit vectoriel,

$$\overrightarrow{\Gamma_M} = \overrightarrow{\Gamma_0} + \left[\vec{\omega}'.\overrightarrow{OM}\right] + \left[\vec{\omega}.\overrightarrow{\frac{d\left\{OM\right\}}{dt}}\right],$$

mais

$$\frac{d\left\{\overrightarrow{OM}\right\}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\vec{M} - \vec{O}\right\} = \overrightarrow{V_M} - \overrightarrow{V_0}.$$

Fig. 16.



Donc

$$\overrightarrow{\Gamma_M} = \overrightarrow{\Gamma_0} + \left[\vec{\omega}'.\overrightarrow{OM}\right] + \left[\vec{\omega}.\left\{\overrightarrow{V_M} - \overrightarrow{V_0}\right\}\right];$$

mais, d'après la formule (5),

$$\overrightarrow{V_M} - \overrightarrow{V_0} = \left[\vec{\omega}.\overrightarrow{OM}\right].$$

Donc

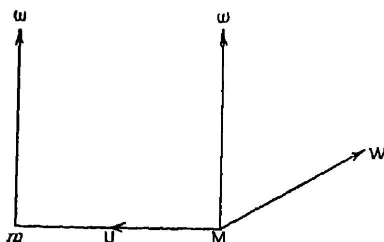
$$\overrightarrow{\Gamma_M} = \overrightarrow{\Gamma_0} + \left[\vec{\omega}'.\overrightarrow{OM}\right] + \left[\vec{\omega}.\left[\vec{\omega}.\overrightarrow{OM}\right]\right].$$

Menons par O un vecteur égal à $\vec{\omega}$, et soit m la projection de M sur Oω (*fig.* 16). On sait que l'on a

$$\left[\vec{\omega}.\overrightarrow{OM}\right] = \left[\vec{\omega}.\overrightarrow{mM}\right].$$

Or, menons par M le vecteur $\overrightarrow{W}$ égal à $\left[\vec{\omega}.\overrightarrow{mM}\right]$ (*fig.* 17). Il

Fig. 17.



est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{\omega}$ et $\overrightarrow{mM}$, et le trièdre MωWm est direct.

D'ailleurs sa grandeur est

$$W = \omega \times \overline{mM},$$

puisque $\vec{\omega}$ et $\overrightarrow{mM}$ sont rectangulaires.

Mais alors le vecteur

$$\vec{U} = \left[\vec{\omega}.\left[\vec{\omega}.\overrightarrow{OM}\right]\right] = \left[\vec{\omega}.\overrightarrow{W}\right]$$

est perpendiculaire à $\vec{\omega}$ et à $\overrightarrow{W}$. Il a donc la direction mM. Son sens est tel que le trièdre MωWU soit direct. Il a donc le sens de M vers m.

Enfin sa grandeur est $|\omega|^2 \times \overline{mM}$. Donc on a

$$\vec{U} = -|\omega|^2.\overrightarrow{mM}$$

et la formule donnant $\overrightarrow{\Gamma_M}$ s'écrit sous la forme

$$\overrightarrow{\Gamma_M} = \overrightarrow{\Gamma_0} + \left[\vec{\omega}'.\overrightarrow{OM}\right] - |\omega|^2\overrightarrow{mM}. \tag{7}$$

On peut se proposer, comme pour la formule des vitesses, de projeter cette formule sur des axes quelconques. Faisons seulement ici le calcul des projections sur les axes mobiles OXYZ.

Soient λ, μ, ν les projections — supposées données — de $\overrightarrow{\Gamma_0}$. Les projections de $\overrightarrow{OM}$ sont X, Y, Z. Celles de $\overrightarrow{mM}$ ne dépendent que de p, q, r, projections de $\vec{\omega}$, et de X, Y, Z. Nous les désignerons par $\overrightarrow{mM_X}$, $\overrightarrow{mM_Y}$, $\overrightarrow{mM_Z}$. Leur calcul n'offre aucune difficulté.

Restent les projections de $\vec{\omega}'$, qui dépendent évidemment des dérivées de p, q, r.

Pour les calculer nous observons que

$$\vec{\omega} = pi + qj + rk$$

et, en dérivant,

$$\omega' = p'i + q'j + r'k + pi' + qj' + rk'.$$

Or, à cause de

$$i' = \overrightarrow{\omega . i}, \qquad j' = \overrightarrow{\omega . j}, \qquad k' = \overrightarrow{\omega . k},$$

on aura, en mettant $\vec{\omega}$ en facteur,

$$pi' + qj' + rk' = \left[\vec{\omega} . \overrightarrow{pi + qj + rk}\right] = \left[\vec{\omega} . \vec{\omega}\right] = 0.$$

Donc

$$\vec{\omega}' = p'i + q'j + r'k;$$

les composantes de $\vec{\omega}'$ sont p', q', r' dérivées de p, q, r par rapport à t.

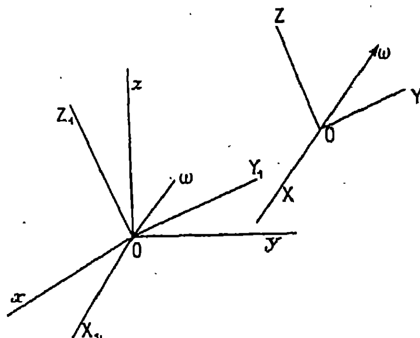
On peut expliquer ce résultat en anticipant sur le Chapitre suivant.

Reportons-nous à la définition de la dérivée géométrique

d'un vecteur : menons par un point o de l'espace fixe un vecteur égal à $\vec{\omega}$; le vecteur $\vec{\omega}'$ est le vecteur vitesse du point ω.

Menons par o des axes fixes $oxyz$, et des axes équipollents aux axes mobiles $oX_1Y_1Z_1$ (*fig.* 18).

Fig. 18.



Dans ce qui suivra, nous nous servirons de définitions et de résultats qui seront exposés dans le prochain Chapitre.

Le point ω est en général mobile, et par rapport à $oxyz$, et par rapport à $oX_1Y_1Z_1$.

Le vecteur $\vec{\omega}$, vitesse absolue de ce point, est la somme de la vitesse relative de ω dans le trièdre $oX_1Y_1Z_1$, et de la vitesse d'entraînement de ce point.

Or, le mouvement instantané de $oX_1Y_1Z_1$ est une rotation, o étant fixe. De plus, comme le vecteur rotation ne dépend pas du mouvement de l'origine du trièdre mobile, le vecteur rotation de $oX_1Y_1Z_1$ est $\vec{\omega}$. Donc $o\omega$ est l'axe instantané du mouvement à l'instant t. Donc la vitesse d'entraînement de ω est nulle.

La vitesse relative ayant pour composantes sur $oX_1Y_1Z_1$, p', q', r', il en est de même de la vitesse absolue qui lui est égale.

Réunissant tous ces résultats, on voit finalement que les

composantes de $\overrightarrow{\Gamma_M}$ sur le trièdre mobile sont

$$\Gamma_X = \lambda + q'Z - r'Y - \omega^2 . \overrightarrow{mM_X},$$
$$\Gamma_Y = \mu + r'X - p'Z - \omega^2 . \overrightarrow{mM_Y},$$
$$\Gamma_Z = \nu + p'Y - q'X - \omega^2 . \overrightarrow{mM_Z}.$$

Cherchons si, à l'instant t, il y a dans l'espace mobile des points d'accélération nulle.

Pour cela, il faut résoudre en X, Y, Z les trois équations

$$\Gamma_X = 0, \qquad \Gamma_Y = 0, \qquad \Gamma_Z = 0.$$

Pour leur donner une forme simple, on peut toujours supposer qu'à l'instant t, le vecteur $\vec{\omega}$ a la direction de OZ (au besoin, on change le choix du trièdre mobile, ce qui ne change évidemment pas le mouvement).

Alors

$$p = q = 0, \qquad r = \omega;$$
$$\overrightarrow{mM_X} = X, \qquad \overrightarrow{mM_Y} = Y, \qquad \overrightarrow{mM_Z} = 0.$$

Donc les équations à résoudre sont :

$$\Gamma_X = \lambda + q'Z - r'Y - \omega^2 X = 0,$$
$$\Gamma_Y = \mu + r'X - p'Z - \omega^2 Y = 0,$$
$$\Gamma_Z = \nu + p'Y - q'X \qquad = 0.$$

C'est un système d'équations linéaires, qui admet en général une solution et une seule, car le déterminant est ici

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\omega^2 & -r' & q' \\ r' & -\omega^2 & -p' \\ -q' & p' & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2(p'^2 + q'^2).$$

En général,

$$\omega \neq 0, \qquad p' \neq 0, \qquad q' \neq 0;$$

donc $\Delta \neq 0$; on a une solution et une seule.

Si $\Delta = 0$ et $\omega \neq 0$, il faut que $p' = q' = 0$. Alors les équa-

tions deviennent

$$\lambda - r'Y - \omega^2 X = 0,$$
$$\mu + r'X - \omega^2 Y = 0,$$
$$\nu = 0.$$

Si $\nu \neq 0$, le système est impossible; aucun point n'a son accélération nulle. Si $\nu = 0$, comme le déterminant des deux premières équations est $\omega^4 + r'^2 \neq 0$, tous les points d'une droite parallèle à $o\omega$ ont une accélération nulle, et ceux-là seulement.

Ce dernier cas peut-il arriver à tout instant? Il faut alors qu'on ait toujours $p' = q' = 0$, c'est-à-dire que $\vec{\omega}'$ soit constamment parallèle à $\vec{\omega}$. Or ceci n'arrive que si le vecteur $\vec{\omega}$ reste parallèle à une direction fixe, car, si l'on se reporte au point o considéré précédemment, le point ω doit décrire une courbe dont la tangente passe toujours en o, ce qui n'a lieu que pour une droite passant par o. D'ailleurs, dans ce cas, la direction du vecteur $\vec{\omega}$ est aussi invariable dans le trièdre mobile, car la vitesse relative du point ω dans le trièdre $oX_1Y_1Z_1$ est toujours dirigée suivant $o\omega$. On a d'ailleurs dans ce cas

$$\frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} = \frac{r'}{r}.$$

Donc

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c},$$

a, b, c étant des constantes.

Ce mouvement a été déjà étudié précédemment. Si l'on veut de plus qu'il y ait des points d'accélération nulle, il faut que $\nu = 0$, c'est-à-dire que la projection de tout point de l'espace mobile sur la direction fixe de $\vec{\omega}$ soit animée d'un mouvement rectiligne uniforme.

Si $\omega = o$ et $\omega' \neq o$, $\Delta = o$ et le système se réduit à

$$\begin{aligned} \lambda + q'Z - r'X &= o, \\ \mu + r'X - p'Z &= o, \\ \nu + p'Y - q'X &= o. \end{aligned}$$

Il est impossible si $p'\lambda + q'\mu + r'\nu \neq o$.

Il est indéterminé si $p'\lambda + q'\mu + r'\nu = o$, le système se réduisant aux deux premières équations si, par exemple $r' \neq o$; il y a alors toute une droite, représentée par ces deux équations, dont tout point aura à l'instant considéré une accélération nulle.

Enfin, si $\omega = o$, $\omega' = o$, tout point dusystème a même accélération $\overrightarrow{\Gamma_0}$ que O, et cette accélération n'est nulle que si $\overrightarrow{\Gamma_0} = o$.

CHAPITRE III.

COMPOSITION DES MOUVEMENTS.

Définitions. — Soit S_0 un système de points invariable, qu'on peut toujours considérer comme fixe. Soient S_1 un système invariable en mouvement par rapport à S_0, et S_2 un autre système invariable en mouvement par rapport à S_1.

En général, S_2 est mobile par rapport à S_0. On est alors conduit à se poser le problème suivant : *Étant donnés les mouvements de* S_2 *par rapport à* S_1, *et de* S_1 *par rapport à* S_0, *trouver le mouvement de* S_2 *par rapport à* S_0.

Dans ce qui suivra, étant donnés deux systèmes de points S et S′, on désignera, pour abréger, par $\left(\frac{S'}{S}\right)$, le mouvement de S′ par rapport à S.

$\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$ est appelé *mouvement relatif ;*

$\left(\frac{S_1}{S_0}\right)$ est le *mouvement d'entraînement;*

$\left(\frac{S_2}{S^0}\right)$ est le *mouvement absolu.*

Soit M un point du système S_1. Sa vitesse dans le mouvement $\left(\frac{S_1}{S_0}\right)$ est appelée *vitesse d'entraînement*, et on la désigne par $\vec{V}_{10}$ ou $\vec{V}_e$. Considérons le point du solide S_2 qui, à l'instant t, est en M. Sa vitesse dans le mouvement $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$ est dite *vitesse relative;* on l'écrit $\vec{V}_{21}$ ou $\vec{V}_r$. Enfin, la vitesse de

ce même point dans le mouvement $\left(\frac{S_2}{S_0}\right)$ est la *vitesse absolue* de ce point, qu'on écrit $\vec{V}_{20}$ ou $\vec{V}_a$.

On a évidemment trois définitions analogues pour les accélérations. L'objèt essentiel de l'étude de la composition des mouvements est la recherche des relations existant entre ces vitesses et ces accélérations à un instant donné.

Composition des vitesses. — Soient donc M un point du solide S_2, (X, Y, Z) ses coordonnées dans le trièdre mobile OXYZ *attaché au solide* S_1. On a, avec les notations du Chapitre précédent,

$$\vec{M} = \vec{O} + Xi + Yj + Zk;$$

seulement ici *les coordonnées* X, Y, Z *sont des fonctions du temps*.

En dérivant cette formule vectorielle, nous aurons l'expression du vecteur $\vec{M}'$, c'est-à-dire de la vitesse absolue $\vec{V}_{20}$ du point M. On a donc

$$\text{(1)} \qquad \vec{V}_{20} = \left\{ \vec{O}' + Xi' + Yj' + Zk' \right\} + \left\{ X'i + Y'j + Z'k \right\}.$$

Or, d'après le Chapitre précédent, la première accolade est justement la vitesse d'entraînement $\vec{V}_{10}$ du point M. Quant au second, c'est un vecteur dont les composantes sur OXYZ sont X′, Y′, Z′. C'est donc la vitesse relative $\vec{V}_{21}$ de M. On a donc

$$\vec{V}_{20} = \vec{V}_{10} + \vec{V}_{21}$$

ou encore

$$\text{(2)} \qquad \vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

On arriverait aisément à la même formule en calculant à l'aide des coordonnées x, y, z de M dans le système fixe $oxyz$.

De la formule (1), on déduit les *composantes de* $\vec{V}_a$ *sur les*

axes mobiles OXYZ. On a, avec les notations précédentes,

$$(2')\quad \begin{cases} V_{aX} = \xi + qZ - rY + X', \\ V_{aY} = \eta + rX - pZ + Y', \\ V_{aZ} = \zeta + pY - qX + Z'. \end{cases}$$

Composition des accélérations. — L'accélération absolue $\vec{\gamma}_a$ de M est la dérivée seconde du vecteur $\vec{M}$. On a donc $\vec{\gamma}_a$ en dérivant la formule (1), ce qui donne

$$\vec{\gamma}_a = \left\{ \vec{O}'' + X i'' + Y j'' + Z k'' \right\} + 2\left\{ X' i' + Y' j' + Z' k' \right\} + \left\{ X'' i + Y'' j + Z'' k \right\}.$$

La première accolade, d'après le Chapitre précédent, n'est autre que le vecteur $\vec{\gamma}_e$, accélération d'entraînement. La troisième est un vecteur de composantes X″, Y″, Z″. C'est donc l'accélération relative $\vec{\gamma}_r$.

Cherchons la signification de la deuxième accolade. Soit $\vec{\gamma}_c$ ce vecteur. On a, d'après les résultats du Chapitre précédent,

$$i' = \overrightarrow{\omega . i}, \qquad j' = \overrightarrow{\omega . j}, \qquad k' = \overrightarrow{\omega . k}.$$

D'où

$$\vec{\gamma}_c = 2\left\{ X' \overrightarrow{\omega . i} + Y' . \overrightarrow{\omega . j} + Z' . \overrightarrow{\omega . k} \right\}$$

ou, en mettant $\vec{\omega}$ en facteur,

$$\vec{\gamma}_c = 2\left[\vec{\omega} . \left\{ \overrightarrow{X' i + Y' j + Z' k} \right\} \right];$$

or, le vecteur entre { } n'est autre que la vitesse relative $\vec{V}_r$ de M. Donc

$$\vec{\gamma}_c = 2\left[\vec{\omega} . \vec{V}_r \right].$$

Ce vecteur $\vec{\gamma}_c$ est appelé *accélération complémentaire* ou encore *accélération de Coriolis*.

On a donc la formule

$$(3) \qquad \vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_r.$$

Cherchons si le vecteur $\vec{\gamma}_c$ peut être nul; cela a lieu dans trois cas :

1° $\vec{\omega} = 0$; le mouvement instantané est un mouvement de translation; si cela arrive à chaque instant, le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation;

2° $\vec{V}_r = 0$; on verra en particulier que cela a lieu, en Dynamique, dans les problèmes d'équilibre relatif;

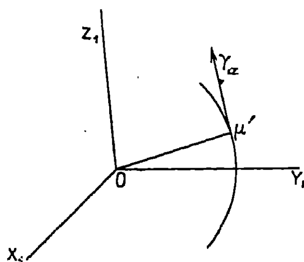
3° $\vec{\omega}$ et $\vec{V}_r$ sont parallèles.

On aurait pu parvenir à la formule (3) en utilisant les coordonnées de M dans le système d'axes $oxyz$. Le calcul n'offre pas de difficultés.

Cherchons les composantes de $\vec{\gamma}_a$ sur les axes mobiles OXYZ. On pourrait projeter la formule (3). On peut aussi procéder directement.

Soit o un point fixe du système S_0. Menons par ce point un

Fig. 19.



vecteur équipollent à $\vec{V}_a$; soit μ par son extrémité (*fig.* 19). L'accélération absolue $\vec{\gamma}_a$ est la dérivée géométrique de $\vec{V}_a$, ou encore la vitesse du point μ.

Les composantes de cette vitesse sur les axes OXYZ ne dépendent évidemment pas de l'origine du trièdre mobile. Menons donc par o des axes $oX_1Y_1Z_1$ parallèles aux axes OXYZ.

Dans ce trièdre, le point μ a pour coordonnées (V_{aX}, V_{aY}, V_{aZ}). Donc, d'après les formules (2'), comme ici l'origine du trièdre est fixe, et comme le vecteur rotation est le même que pour le trièdre OXYZ, on a comme composantes de $\vec{\gamma}_a$

$$(3')\qquad \left\{\begin{aligned} \gamma_{aX} &= \frac{dV_{aX}}{dt} + qV_{aZ} - rV_{aY},\\ \gamma_{aY} &= \frac{dV_{aY}}{dt} + rV_{aX} - pV_{aZ},\\ \gamma_{aZ} &= \frac{dV_{aZ}}{dt} + pV_{aY} - qV_{aX}.\end{aligned}\right.$$

Ces formules sont dites *formules de Bour*.

Si, dans ces formules, on remplace V_{aX}, V_{aY}, V_{aZ} par leur valeur tirée de (2'), on a, en développant,

$$\begin{aligned}\gamma_{aX} = {}&(X'' + \xi' + qZ' - rY' + q'Z - r'Y)\\ &+ q(Z' + \zeta + pY - qX) - r(\eta + Y' + rX - pZ),\end{aligned}$$

ou, en ordonnant par rapport aux dérivées de X, Y, Z,

$$\begin{aligned}\gamma_{aX} = {}&[\xi' + q'Z - r'Y + q(\zeta + pY - qX) - r(\eta + rX - pZ)]\\ &+ 2[qZ' - rY'] + X'',\end{aligned}$$

et les deux formules analogues pour γ_{aY} et γ_{aZ}. Dans cette formule, on a mis en évidence les projections de $\vec{\gamma}_e$, $\vec{\gamma}_c$ et $\vec{\gamma}_r$.

Cas particulier. — Supposons que le mouvement d'entraînement soit une rotation uniforme. Prenons alors comme trièdre mobile le trièdre déjà considéré dans l'étude du mouvement de rotation, ω est alors constant, et l'on a

$$v = q = 0, \qquad r = \omega,$$

puis

$$\xi = \eta = \zeta = 0.$$

Les formules (2′) et (3′) deviennent alors

$$
\begin{aligned}
V_{ax} &= X' - \omega Y,\\
V_{ay} &= Y' + \omega X,\\
V_{az} &= Z;\\
\gamma_{ax} &= X'' - 2\omega Y' - \omega^2 X,\\
\gamma_{ay} &= Y'' + 2\omega X' - \omega^2 Y,\\
\gamma_{az} &= Z''.
\end{aligned}
$$

Composition de plusieurs mouvements. — Considérons un système invariable S_0, qu'on peut supposer fixe, et n systèmes en mouvement $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

On suppose connus les mouvements $\left(\frac{S_1}{S_0}\right), \left(\frac{S_2}{S_1}\right), \ldots, \left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$, qu'on appelle *mouvements composants;* on cherche le mouvement $\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$, dit *mouvement résultant.*

Soit, à l'instant t, un point M. Si l'on considère ce point comme lié à un système S_i, et ce système S_i en mouvement par rapport au système S_j, la vitesse de M dans ce mouvement est désignée par $\vec{V}_{ij}$.

Cherchons la vitesse $\overrightarrow{V_{n0}}$.

D'après les résultats antérieurs sur la composition de deux mouvements on a

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{V_{20}} &= \overrightarrow{V_{10}} + \overrightarrow{V_{21}},\\
\overrightarrow{V_{30}} &= \overrightarrow{V_{20}} + \overrightarrow{V_{32}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\overrightarrow{V_{n0}} &= \overrightarrow{V_{n-1,0}} + \overrightarrow{V_{n,n-1}};
\end{aligned}
$$

en ajoutant membre à membre ces égalités, il vient

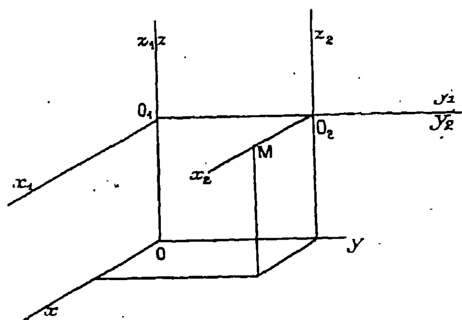
$$\overrightarrow{V_{n0}} = \overrightarrow{V_{10}} + \overrightarrow{V_{21}} + \overrightarrow{V_{32}} + \ldots + \overrightarrow{V_{n,n-1}}.$$

C'est la généralisation de la relation trouvée dans l'étude de la composition de deux mouvements.

Le théorème sur la composition des accélérations ne donne pas de généralisation aussi simple, à cause de l'introduction de l'accélération complémentaire.

Applications de la composition des mouvements. — I. Applications cinématiques. — 1° On peut, à l'aide de la composition des mouvements, retrouver les composantes de la vitesse d'un point en coordonnées cartésiennes. Soient $oxyz$ le trièdre de référence, M le point mobile (*fig.* 20). Soient

Fig. 20.



O_2 le point de coordonnées o, y, z et $o_2x_2y_2z_2$ un trièdre équipollent à $oxyz$. Soient ensuite o_1 le point de coordonnées o, o, z, et $o_1x_1y_1z$, le trièdre équipollent à $oxyz$ de sommet o_1. Soient $\overrightarrow{V_2}$ la vitesse de M par rapport $o_2x_2y_2z_2$, $\overrightarrow{V_{21}}$ la vitesse d'entraînement de $o_2x_2y_2z_2$ par rapport à $o_1x_1y_1z_1$, $\overrightarrow{V_{10}}$ la vitesse d'entraînement de $o_1x_1y_1z_1$ par rapport à $oxyz$, V la vitesse de M par rappport à $oxyz$. On a

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_{21}} + \overrightarrow{V_{10}},$$

d'après le théorème sur la composition des vitesses.

Mais, sur $oxyz$,

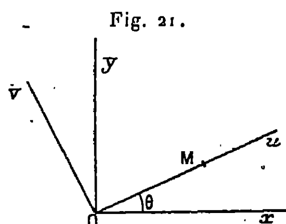
$\vec{V}_2$	a pour composantes	x', o, o;
$\vec{V}_{21}$	»	o, y', o;
$\vec{V}_{10}$	»	o, o, z'.

Donc

V	»	x', y', z'.

2° On peut aussi trouver par ce moyen les composantes de $\vec{V}$ et de $\vec{\gamma}$ en coordonnées polaires, pour un point M se déplaçant dans un plan (*fig.* 21). On peut considérer que le

Fig. 21.



mouvement absolu de M résulte du mouvement relatif de M sur ou et d'un mouvement d'entraînement, rotation de ouv autour de o, avec une vitesse angulaire égale à θ'.

Projetons la relation $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$ sur ou et ov pour avoir les composantes de $\vec{V}_a$ sur ces axes.

Nous indiquerons dans un tableau les projections de ces trois vecteurs :

	$\vec{V}_e$.	$\vec{V}_r$.	$\vec{V}_a$.
Projections sur ou......	o	r'	r'
Projections sur ov......	$r\theta'$	o	$r\theta'$

On peut de même trouver ainsi les composantes de $\vec{\gamma}$; la seule difficulté est de calculer les composantes de $\vec{\gamma}_c$; le vecteur $\vec{\omega}$ est ici dirigé suivant oz (le trièdre $ouvz$ étant direct); donc ω

et V_r ont pour composantes dans le trièdre $ouvz$

	$ou.$	$ov.$	$oz.$
$\vec{\omega}$..............	o	o	θ'
$\vec{V_r}$..............	r'	o	o

d'où celles de

$\vec{\gamma_c}$..............	o	$2r'\theta'$	o

Donc on a le tableau analogue au tableau des vitesses

	$\vec{\gamma_e}$.	$\vec{\gamma_c}$.	$\vec{\gamma_r}$.	$\vec{\gamma_a}$.
ou.....	$-r\theta'^2$	o	r''	$r''-r\theta'^2$
ov.....	$r\theta''$	$2r'\theta'$	o	$r\theta''+2r'\theta'$

On retrouve donc ainsi les résultats classiques.

3° *Mouvements inverses.* — Soient deux systèmes invariables S_1 et S_2 en mouvement l'un par rapport à l'autre. Les mouvements $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$ et $\left(\frac{S_1}{S_2}\right)$ sont dits *inverses* l'un de l'autre.

Soit A un point quelconque, à l'instant t. Soit $\vec{V_{21}}$ sa vitesse lorsqu'on le considère comme appartenant à S_2, $\vec{V_{12}}$ sa vitesse lorsqu'on le considère comme appartenant à S_1. Le mouvement de S_1 par rapport à S_1 peut être considéré comme résultant des deux mouvements $\left(\frac{S_1}{S_2}\right)$ et $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$. Or S_1 est en repos par rapport à lui-même. Donc la vitesse de tout point de S_1 par rapport à S_1 est nulle. On a donc, en appliquant le théorème de la composition des vitesses,

$$0 = \vec{V_{12}} + \vec{V_{21}},$$
$$\vec{V_{12}} = -\vec{V_{21}},$$

pour tout point de l'espace.

Or, soit M un autre point. Soient $\vec{\omega}$ le vecteur rotation de S_2

par rapport à S_1, $\vec{\omega}'$ celui de S_1 par rapport à S_2. On a, pour le point M,

$$\overrightarrow{V_{21}^M} = \overrightarrow{V_{21}^A} + [\vec{\omega} . \overrightarrow{AM}],$$
$$\overrightarrow{V_{12}^M} = \overrightarrow{V_{12}^A} + [\vec{\omega}' . \overrightarrow{AM}];$$

comme

$$\overrightarrow{V_{21}^M} = -\overrightarrow{V_{12}^M}, \qquad \overrightarrow{V_{21}^A} = -\overrightarrow{V_{12}^A},$$

on a

$$[\vec{\omega} . \overrightarrow{AM}] = -[\vec{\omega}' . \overrightarrow{AM}]$$

ou

$$[\{\vec{\omega} + \vec{\omega}'\} . \overrightarrow{AM}] = 0$$

et, comme M est quelconque,

$$\vec{\omega} + \vec{\omega}' = 0.$$

On en déduit aussitôt que les axes instantanés des deux mouvements inverses $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$ et $\left(\frac{S_1}{S_2}\right)$ sont *confondus* et si A est un point de cet axe, les éléments $\vec{V}_{21}^A$ et $\vec{\omega}$ du mouvement $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$ sont *opposés* aux éléments $\vec{V}_{12}^A$ et $\vec{\omega}'$ du mouvement $\left(\frac{S_1}{S_2}\right)$.

4° *Détermination des éléments du mouvement résultant.* — Considérons un système fixe S_0, et n systèmes mobiles S_1, S_2, ..., S_n. Avec les notatioms nouvelles, on a en un point M

$$\overrightarrow{V_{n0}} = \overrightarrow{V_{10}} + \overrightarrow{V_{21}} + \overrightarrow{V_{32}} + \ldots + \overrightarrow{V_{n,n-1}}.$$

Lorsque les mouvements composants $\left(\frac{S_1}{S_0}\right)$, ..., $\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$ sont des mouvements particuliers, on peut déduire de l'égalité précédente la nature du mouvement résultant $\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$.

1° Supposons tous les mouvements composants *tangents à des translations à l'instant considéré.*

Alors, les vitesses $\overrightarrow{V_{10}}$, ..., $\overrightarrow{V_{n,n-1}}$ sont indépendantes du

point M considéré. Il en est donc de même de $\overrightarrow{V_{n0}}$; autrement dit, le *mouvement résultant est aussi tangent à une translation.*

2° Supposons tous les mouvements composants *tangents à des rotations*. Soient Δ_i l'axe de rotation instantané du mouvement $\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$, A_i un point de cet axe, $\overrightarrow{\omega_i}$ le vecteur rotation correspondant, d'origine A_i. On a

$$\overrightarrow{V_{10}} = \left[\overrightarrow{\omega_1}.\overrightarrow{A_1 M}\right], \qquad \overrightarrow{V_{21}} = \left[\overrightarrow{\omega_2}.\overrightarrow{A_2 M}\right], \qquad \dots,$$
$$\overrightarrow{V_{i,i-1}} = \left[\overrightarrow{\omega_i}.\overrightarrow{A_i M}\right], \qquad \dots, \qquad \overrightarrow{V_{n,n-1}} = \left[\overrightarrow{\omega_n}.\overrightarrow{A_n M}\right].$$

Ceci montre donc que $\overrightarrow{V_{n0}}$ n'est autre que *le moment résultant par rapport à* M *du système des vecteurs* $\overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_2}, \dots, \overrightarrow{\omega_n}$. En général, ce système n'est pas équivalent à un vecteur unique; donc le mouvement résultant n'est pas tangent à une rotation. On verrait aisément que l'axe instantané de ce mouvement n'est autre que l'*axe central du système des vecteurs rotations.*

Lorsque le système des vecteurs $\overrightarrow{\omega_i}$ est équivalent à un vecteur unique $\overrightarrow{\Omega}$, le mouvement résultant sera tangent à un mouvement de rotation $\overrightarrow{\Omega}$.

Il en est ainsi en particulier *lorsque les axes* Δ_i *passent par un même point* O. Dans ce cas $\overrightarrow{\Omega}$ est la résultante des vecteurs $\overrightarrow{\omega_i}$, et passe par le point O. Donc l'axe de rotation instantané du mouvement résultant passe par O.

Si les axes Δ_i *sont parallèles*, $\overrightarrow{\Omega}$ est un vecteur parallèle à la direction de ces axes et qu'on sait construire.

Enfin, lorsque le système des vecteurs ω_i *est équivalent à un couple*, le mouvement résultant est *tangent à une translation* dont la vitesse est l'axe du couple équivalent.

Plus généralement, dans le cas où les mouvements composants sont des mouvements généraux, mais lorsque le système des vecteurs rotations de ces mouvements est équivalent à un couple, on verrait que le mouvement résultant est tangent à une translation.

5° *Lorsque dans le mouvement d'un trièdre* S_1 *par rapport à* S_0, *l'axe hélicoïdal instantané a une direction fixe par rapport à* S_1, *il a aussi une direction fixe par rapport à* S_0, *et réciproquement.*

Supposons d'abord que l'axe instantané Δ qui est parallèle à $\vec{\omega}$ ait une direction fixe par rapport à S_1. Prenons l'axe OZ parallèle à cette direction du corps S_1. On aura $p = q = 0$. En vertu de l'égalité vectorielle $k' = \overrightarrow{\omega . k}$, les deux vecteurs $\vec{\omega}$ et k étant parallèles à OZ, on aura $k' = 0$. Le vecteur k restera donc *équipollent à lui-même*, c'est-à-dire que OZ et Δ resteront parallèles à une direction fixe de S_0.

Inversement supposons que Δ soit parallèle à une direction fixe de S_0 et envisageons le mouvement inverse $\left(\frac{S_0}{S_1}\right)$ dont l'axe hélicoïdal instantané est aussi Δ; en raisonnant comme ci-dessus on verra aussitôt que Δ a une direction fixe par rapport à S_1.

Dans le cas présent il sera souvent utile de choisir pour oz et OZ des directions parallèles à Δ.

II. Applications géométriques. — On a pu voir, sur les théories exposées dans les deux premiers Chapitres, combien intimement sont liées la Géométrie et la Cinématique. Les éléments du mouvement d'un point sont en relation étroite avec les éléments de la trajectoire de ce point, et c'est en appliquant des résultats géométriques que nous avons obtenu une interprétation simple des résultats analytiques relatifs au mouvement d'un point ou d'un solide.

Inversement, étant donné par exemple un système de

courbes ou de surfaces, si l'on peut trouver un système de points décrivant ces lieux avec un mouvement simple, l'étude de ce mouvement permettra de trouver des propriétés du système donné.

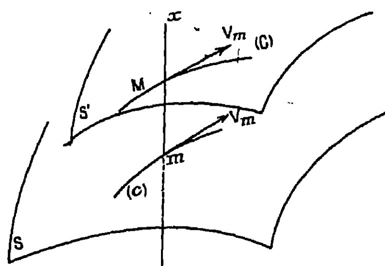
En particulier, on se rend compte que l'application de théories proprement cinématiques, comme celle de la composition des mouvements, facilitera l'étude du problème précédent.

L'idée de cette application de la Cinématique à la Géométrie revient à Roberval, qui en déduisit une méthode générale pour construire les tangentes aux courbes, avant l'invention du calcul infinitésimal.

Poinsot a simplifié et généralisé la méthode de Roberval. C'est sa méthode que nous exposerons en premier lieu.

1° *Méthode de Poinsot.* — Considérons une surface (S) (*fig.* 22) et soit m un point se déplaçant sur cette surface

Fig. 22.



avec un certain mouvement. Soit mx la normale à la surface au point m, orientée dans un sens déterminé. Si l'on porte sur mx une longueur constante $\overline{mM} = r$, lorsque le point m décrit une courbe (c) sur la surface (S), le point M décrira une courbe (C) sur une surface (S′) parallèle à (S). Les points m et M sont invariablement liés; donc, les projections sur mM des vitesses respectives $\overrightarrow{v_m}$ et $\overrightarrow{v_M}$ de ces points sont

égales. Or $\vec{v}_m$ est normale à mM, donc il en est de même de $\vec{v}_M$.

Supposons maintenant que, lorsque le temps t varie, r varie aussi. Le mouvement du point M peut être considéré comme le mouvement résultant :

a. Du mouvement d'entraînement de la normale mx;
b. Du mouvement relatif du point M sur mx.

Donc, d'après le théorème de la composition des vitesses, on a

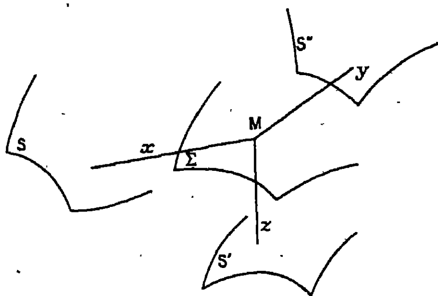
$$\vec{V}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

avec les notations habituelles. Or $\vec{v}_r$ est un vecteur porté sur mx et de valeur algébrique $\frac{dr}{dt}$. Quant à $\vec{v}_e$, nous avons vu ci-dessus que c'est un vecteur normal à mM.

Donc nous avons le résultat suivant : *la projection de la vitesse de* M *sur mx est un vecteur de mesure* $\frac{dr}{dt}$.

Considérons alors, avec Poinsot, un point M décrivant une surface Σ, et trois surfaces données (S), (S′), (S″), prises comme surfaces de référence (*fig.* 23).

Fig. 23.



Considérons les normales Mx, My, Mz menées de M à ces surfaces (s'il existe plusieurs normales menées de M à

l'une des surfaces, on choisit l'une d'entre elles et on la suit par continuité; on peut toujours orienter cette normale).

Soient r, r', r'', les distances de M à (S), (S'), (S'') comptées algébriquement sur les normales orientées.

Lorsque M décrit la surface Σ, si les surfaces (S), (S'), (S'') sont quelconques, les trois quantités r, r', r'' ne sont pas indépendantes. Il existe entre elles une certaine relation

$$f(r, r', r'') = 0, \tag{1}$$

qui peut être considérée comme une généralisation de l'équation cartésienne de la surface (celle-ci correspond au cas où S, S', S'' sont les trois faces d'un trièdre trirectangle). Réciproquement, si une telle relation existe entre r, r', r'', le point M décrira en général une surface Σ.

Supposons alors que M se déplace sur Σ, avec un certain mouvement. Soit $\vec{v}$ sa vitesse à un instant donné.

D'après ce que l'on a vu plus haut, les projections de $\vec{v}$ sur Mx, My, Mz sont respectivement les vecteurs de mesure

$$\frac{dr}{dt}, \quad \frac{dr'}{dt}, \quad \frac{dr''}{dt}.$$

Si l'on considère sur Mx, My, Mz, des vecteurs unitaires $\vec{n}$, $\vec{n'}$, $\vec{n''}$, on peut encore écrire

$$\frac{dr}{dt} = (v.n), \qquad \frac{dr'}{dt} = (v.n'), \qquad \frac{dr''}{dt} = (v.n'').$$

Or, si nous dérivons l'équation (1), où l'on suppose r, r', r'' remplacés par leur valeur en fonction de t, on a identiquement

$$\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt} + \frac{\partial f}{\partial r'}\cdot\frac{dr'}{dt} + \frac{\partial f}{\partial r''}\cdot\frac{dr''}{dt} = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial f}{\partial r}(v.n) + \frac{\partial f}{\partial r'}(v.n') + \frac{\partial f}{\partial r''}(v.n'') = 0$$

ou, en mettant v en facteur dans les produits scalaires,

$$\left(\vec{v}.\left\{\frac{\partial f}{\partial r}\vec{n}+\frac{\partial f}{\partial r'}\vec{n'}+\frac{\partial f}{\partial r''}\vec{n''}\right\}\right)=0.$$

Ce qui exprime que le vecteur $\vec{v}$ est perpendiculaire au vecteur

$$\vec{N}=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{n}+\frac{\partial f}{\partial r'}\vec{n'}+\frac{\partial f}{\partial r''}\vec{n''}.$$

Ce vecteur ne dépend évidemment pas de la direction de la vitesse $\vec{v}$ dans le plan tangent en M à Σ. Donc $\vec{N}$ est perpendiculaire à toutes les directions du plan tangent. C'est donc un vecteur porté par la normale en M à Σ.

Nous aboutissons donc à la règle donnée par Poinsot : *Pour construire la normale en* M *à* Σ, *on fait la somme géométrique de vecteurs portés par* Mx, My, Mz *et ayant respectivement pour mesure*

$$\frac{\partial f}{\partial r},\quad \frac{\partial f}{\partial r'},\quad \frac{\partial f}{\partial r''}\quad (^1).$$

La méthode exposée dans le cas de l'espace s'étend de suite au cas du plan, en remplaçant les trois surfaces S, S', S'' par deux courbes C et C', et la surface Σ par la courbe Γ lieu de M.

Comme exemple, construisons la normale à l'ellipse en un point M. Les courbes C et C' seront ici les foyers F et F' (*fig.* 24). Orientons FM et F'M, de F et F' vers M. L'équation de l'ellipse est alors

$$f(r,\,r')\equiv r+r'-2a=0.$$

On a ici

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial r'}=1,$$

---

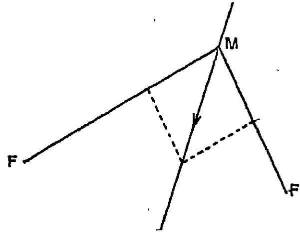
(1) La méthode est valable dans le cas où l'on aura n surfaces de référence s_1, s_2, s_n pour une surface Σ d'équation

$$f(r_1,\,r_2,\,\ldots,\,r_n)=0,$$

mais alors les distances r_1, r_2, $\ldots$, r_n ne sont plus des fonctions indépendantes.

les deux vecteurs sont égaux, leur somme géométrique est dirigée suivant la bissectrice des vecteurs $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{F'M}$, donc

Fig. 24.



suivant la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$; on retrouve bien le résultat classique.

2° *Méthode de Roberval.* — Dans cette méthode, on considère, comme précédemment, un point M décrivant une surface Σ, d'équation

$$f(r, r', r'') = 0,$$

rapportée à trois surfaces de référence. Si l'on peut connaître les vecteurs $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dr'}{dt}$, $\frac{dr''}{dt}$, en portant à partir de M ces vecteurs sur Mx, My, Mz respectivement, on aura les projections de $\vec{v}$ sur ces trois droites. Si ces droites ne sont pas dans un même plan, en menant par l'extrémité de chaque vecteur composant un plan perpendiculaire à la direction de ce vecteur, le point d'intersection de ces plans sera l'extrémité du vecteur $\vec{v}$. Si l'on n'a pas $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dr'}{dt}$, $\frac{dr''}{dt}$, mais des quantités proportionnelles, la même construction donnera toujours évidemment un point de la tangente en M à la trajectoire de ce point.

Cette méthode ne s'applique facilement que dans le cas du plan, parce qu'elle donne alors directement la tangente (tandis que dans l'espace, on n'a qu'une droite du plan tangent), et qu'on peut avoir directement des quantités proportionnelles à

$\frac{dr}{dt}$ et $\frac{dr'}{dt}$, puisqu'on a

$$\frac{\partial f}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\frac{\partial f}{\partial r'}\frac{dr'}{dt}=0$$

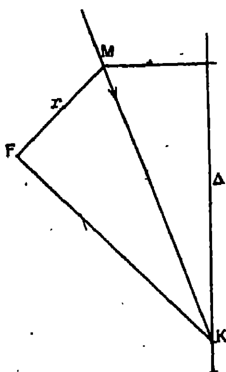
ou

$$\frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{\partial f}{\partial r'}}=\frac{\frac{dr'}{dt}}{-\frac{\partial f}{\partial r}}.$$

Si l'on peut trouver une représentation paramétrique de r et r' en fonction d'un paramètre u, $\frac{dr}{du}$ et $\frac{dr'}{du}$ donneront aussi des quantités proportionnelles à $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{dr'}{dt}$.

Par exemple, construisons la tangente en un point d'une conique définie par un foyer F et la directrice Δ correspondante. Si l'on prend ici comme courbes de référence F et Δ,

Fig. 25.



a conique est définie par $r=er'$, e étant l'excentricité (*fig.* 25). On a donc

$$\frac{dr}{dt}=e\frac{dr'}{dt},$$

ce qui montre que r et r' sont ici des quantité proportionnelles à $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{dr'}{dt}$. La méthode de Roberval redonne la construction classique.



CHAPITRE IV.

APPLICATIONS DE LA COMPOSITION DES MOUVEMENTS (*suite*).
MÉTHODE DU TRIÈDRE MOBILE.

Méthode du trièdre mobile. — Les résultats obtenus dans le Chapitre III vont nous permettre d'examiner un problème qui se posait au Chapitre II, par suite des considérations suivantes :

Si l'on se donne la loi du mouvement d'un point M, sa vitesse est bien déterminée en fonction du temps. Inversement, si l'on se donne en fonction du temps les composantes $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ de la vitesse d'un point M, existe-t-il un mouvement dont la vitesse ait constamment pour composantes ces fonctions?

On doit pour cela chercher des fonctions x, y, z de t, telles que

$$x' = X(t),$$
$$y' = Y(t),$$
$$z' = Z(t).$$

Les coordonnées x, y, z de M sont donc des primitives de X, Y, Z, et sont parfaitement déterminées si l'on se donne leurs valeurs, c'est-à-dire la position du point M, pour une valeur particulière t_0 du temps t.

Lorsqu'on passe au mouvement d'un système, on a vu qu'à chaque instant les projections de la vitesse d'un point M quelconque du système, sur un trièdre invariablement lié au

système, sont données par

$$V_X = \xi + qZ - rY,$$
$$V_Y = \eta + rX - pZ,$$
$$V_Z = \zeta + pY - qX,$$

avec les notations du Chapitre II.

Si le mouvement du système est donné, les quantités ξ, η, ζ, p, q, r sont six fonctions bien déterminées du temps t. On est alors conduit à se poser la question suivante : *Si*, inversement, *on se donne* a priori *six fonctions du temps, est-il possible de trouver un système en mouvement, pour lequel* ξ, η, ζ, p, q, r *soient égales à ces six fonctions?*

C'est cette question que nous allons traiter à présent. Nous supposerons de plus qu'on se donne la position du trièdre mobile S_1 à l'instant t_0.

Remarquons d'abord que si le problème admet une solution, le mouvement de S_1 par rapport au système de référence sera indépendant du trièdre fixe choisi dans ce système. Si l'on change ce trièdre, les formules donnant en fonction du temps les coordonnées d'un point M du système mobile dans ce trièdre, seront transformées par les formules ordinaires du changement d'axes.

Nous pouvons donc choisir arbitrairement le trièdre fixe S_0. Afin de simplifier les calculs, nous le supposerons tel qu'à l'instant t_0, *il soit confondu avec le trièdre* S_1. A cet instant, on a donc pour valeurs initiales des éléments du trièdre S_1

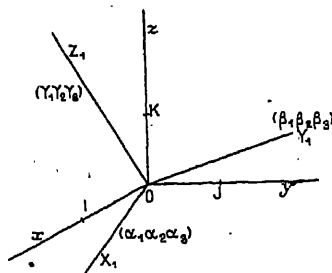
$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$
$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0;$$
$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 0;$$
$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1.$$

Il s'agit de trouver ces quantités en fonction du temps, à l'aide de ces valeurs initiales et des six fonctions ξ, η, ζ, p, q, r.

La détermination des cosinus directeurs, c'est-à-dire des vecteurs i, j, k, ne dépend pas de ξ, η, ζ, c'est-à-dire du mouvement de O, puisque inversement la vitesse de O ne dépend pas de la variation des vecteurs i, j, k.

Considérons donc un trièdre S'_1 de même origine O que le trièdre fixe S_0, et cherchons à déterminer son mouvement, connaissant les projections p, q, r de son vecteur rotation

Fig. 26.



(*fig.* 26). *La méthode va consister à déterminer le mouvement de* S_0 *par rapport à* S'_1 *connaissant* p, q, r.

Nous pouvons considérer que le mouvement de S_0 par rapport à lui-même, c'est-à-dire le repos, est le mouvement résultant des deux mouvements $\left(\frac{S_0}{S'_1}\right)$ et $\left(\frac{S'_1}{S_0}\right)$.

Pour exprimer que la vitesse de tout point de S_0 est nulle, il suffit d'écrire que les extrémités I, J, K des vecteurs unités de S_0 restent fixes.

Or, les coordonnées de I par rapport à S'_1 sont α_1, β_1, γ_1, et la vitesse de I par rapport à S_0 a pour composantes sur S'_1

$$\begin{aligned}
V_X &= \alpha'_1 + q\gamma_1 - r\beta_1,\\
V_Y &= \beta'_1 + r\alpha_1 - p\gamma_1,\\
V_Z &= \gamma'_1 + p\beta_1 - q\alpha_1.
\end{aligned}$$

En écrivant que ces trois quantités sont identiquement nulles, on voit que α_1, β_1, γ_1 sont un système de solutions du

système d'équations différentielles

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= rY - qZ,\\ \frac{dY}{dt} &= pZ - rX,\\ \frac{dZ}{dt} &= qX - pY.\end{aligned}\right.$$

En écrivant que les points J et K restent immobiles, on verrait que $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ et $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ sont deux autres systèmes de solutions des équations (I).

(I) est un système d'équations linéaires; moyennant des hypothèses très générales sur p, q, r, par exemple l'existence des dérivées p', q', r', on sait que tout système de solutions d'un tel système d'équations est déterminé d'une façon unique par ses valeurs initiales (théorème de Cauchy).

Donc on voit que les cosinus directeurs sont bien déterminés en fonction du temps, connaissant leurs valeurs initiales, par le système (1).

Si l'on revient alors au problème primitif, il reste encore à déterminer le mouvement de l'origine O du trièdre mobile S_1. Or, on a

$$\begin{aligned} x'_0 &= \xi\alpha_1 + \eta\beta_1 + \zeta\gamma_1,\\ y'_0 &= \xi\alpha_2 + \eta\beta_2 + \zeta\gamma_2,\\ z'_0 &= \xi\alpha_3 + \eta\beta_3 + \zeta\gamma_3.\end{aligned}$$

Comme on connaît les cosinus directeurs, on voit qu'on aura x_0, y_0, z_0 par des quadratures.

Il reste à montrer que les fonctions $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \gamma_3$ ainsi déterminés restent bien pendant le mouvement, les cosinus directeurs d'un trièdre trirectangle.

Ceci résulte des propriétés du système différentiel (I).

En effet, multiplions la première équation par X, la deuxième par Y, la troisième par Z, et ajoutons. On obtient la combinaison

$$X\frac{dX}{dt} + Y\frac{dY}{dt} + Z\frac{dZ}{dt} = 0,$$

combinaison intégrable qui donne l'intégrale première

$$\text{(II)} \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = \text{const.}$$

Toute solution de (I) vérifie donc (II), la constante étant déterminée par les valeurs initiales de X, Y, Z.

En particulier, comme pour le système α_1, β_1, γ_1, on a comme conditions initiales

$$\alpha_1 = 1, \qquad \beta_1 = 0, \qquad \gamma_1 = 0.$$

On en déduit que ces trois fonctions satisfont à la relation

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1.$$

On voit de même que

$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1,$$
$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Considérons deux solutions indépendantes (X, Y, Z), (X_1, Y_1, Z_1) de (I). On a

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \text{const.}, \qquad X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = \text{const.}$$

De plus, comme (I) est linéaire,

$$(X + kX_1, \quad Y + kY_1, \quad Z + kZ_1),$$

où k est une constante, est encore une solution. Donc, on a aussi

$$(X + kX_1)^2 + (Y + kY_1)^2 + (Z + kZ_1)^2 = \text{const.}$$

et, d'après les relations précédentes, en développant cette égalité, on a

$$\text{(III)} \qquad XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = \text{const.}$$

Donc deux solutions indépendantes, et d'ailleurs quelconques, de (I), vérifient (III). La constante est déterminée par les valeurs initiales.

Si l'on prend en particulier, comme solutions, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ d'une part, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ de l'autre, on voit, avec les valeurs

initiales de ces fonctions, qu'on a constamment

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0;$$

on voit de même que

$$\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0,$$
$$\alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1=0.$$

Nous voyons donc que les neuf fonctions α_1, β_1, ..., γ_3 sont bien les cosinus directeurs d'un trièdre trirectangle.

On peut se servir de la propriété (II) pour poursuivre l'intégration du système (I).

Comme le système (I) est linéaire, on peut toujours, en multipliant X, Y, Z par les constantes convenablement choisies, ne considérer que les solutions satisfaisant par exemple à

$$X^2+Y^2+Z^2=1. \tag{IV}$$

Ceci revient à prendre le point de coordonnées (X, Y, Z) sur la sphère de rayon 1 et de centre l'origine. Ce point doit décrire sur cette sphère une courbe satisfaisant au système (I). Comme un point dépend sur la sphère de deux paramètres, on peut transformer le système (I) en un système d'équations à deux inconnues, en prenant une représentation paramétrique de la sphère.

Darboux a indiqué une telle méthode, en prenant la représentation paramétrique de la sphère déduite de la considération de ses génératrices imaginaires. Pour avoir cette représentation, on met l'équation (IV) sous la forme

$$(X+iY)(X-iY)+(Z-1)(Z+1)=0$$

et l'on pose

$$\text{(V)}\qquad \begin{cases} \lambda\ = \dfrac{X+iY}{1-Z}=\dfrac{1+Z}{X-iY}, \\[2ex] \lambda_0=\dfrac{X-iY}{1-Z}=\dfrac{1+Z}{X+iY}, \end{cases}$$

λ et λ_0 étant deux paramètres imaginaires conjugués si l'on ne considère que les solutions (X, Y, Z) réelles.

Il est commode d'ailleurs de poser $\lambda_0 = -\frac{1}{\mu}$, pour donner plus de symétrie aux formules. On tire alors de (V) X, Y, Z en fonction de λ et μ :

$$
\text{(VI)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
X &= \frac{1-\lambda\mu}{\lambda-\mu}, \\
Y &= i\,\frac{1+\lambda\mu}{\lambda-\mu}, \\
Z &= \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}.
\end{aligned}
\right.
$$

En portant ces valeurs de X, Y, Z dans le système (I), on trouve après un calcul facile que λ et μ vérifient le système d'équations différentielles

$$
\begin{aligned}
\lambda' &= \frac{q-ip}{2} - ir\lambda + \frac{q+ip}{2}\lambda^2, \\
\mu' &= \frac{q-ip}{2} - ir\mu + \frac{q+ip}{2}\mu^2.
\end{aligned}
$$

Ce sont deux équations de Riccati identiques. On voit donc qu'on peut ramener l'intégration de (I) à l'intégration d'une équation de Riccati.

D'ailleurs, si l'on connaît une intégrale réelle particulière de (I), on en déduit une intégrale particulière λ imaginaire de l'équation de Riccati. Mais alors le calcul précédent nous montre que cette équation admet une deuxième intégrale particulière

$$\mu = -\frac{1}{\lambda_0}.$$

Connaissant deux intégrales particulières d'une équation de Riccati, on en déduit l'intégrale générale par une quadrature. Ainsi, si l'on a une intégrale particulière réelle de (I), on en déduira l'intégrale générale par une quadrature.

Nous n'insisterons pas sur les propriétés du système (I), au sujet desquelles on pourra consulter le tome I des *Leçons*

sur la théorie des surfaces de Darboux, où l'étude du système (I) est faite d'une façon très complète.

Nous avons cherché à déterminer le mouvement du trièdre mobile (S_1), connaissant les composantes sur ce trièdre de la vitesse de son origine $\overrightarrow{V_0}$, et du vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}$. On pourrait aussi se proposer le même problème en se donnant les composantes de ces vecteurs sur le trièdre fixe

$$V_0 \mid x'_0 y'_0 z'_0,$$
$$\omega \mid p_1 q_1 r_1.$$

Comme on connaît x'_0, y'_0, z'_0, on a de suite x_0, y_0, z_0 par des quadratures.

Pour trouver les cosinus directeurs de S_1, on projette sur le trièdre fixe les relations vectorielles

$$i' = \overrightarrow{\omega . i}, \qquad j' = \overrightarrow{\omega . j}, \qquad k' = \overrightarrow{\omega . k}.$$

La première donne par projection les trois équations

$$(\text{I}') \qquad \begin{cases} \alpha'_1 = q_1\alpha_3 - r_1\alpha_2, \\ \alpha'_2 = r_1\alpha_1 - p_1\alpha_3, \\ \alpha'_3 = p_1\alpha_2 - q_1\alpha_1, \end{cases}$$

et l'on voit aisément que ($\beta_1, \beta_2, \beta_3$) et ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) vérifient également le système (I').

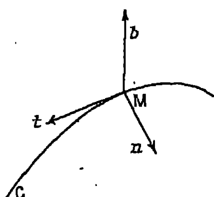
Ce second système différentiel que vérifient les neuf cosinus n'est autre que ce qu'on appelle, dans la théorie des équations différentielles, le système adjoint du système (I). L'intégration du système (I'), qui a la même forme que (I), se fera comme pour ce dernier.

Applications géométriques de la méhode du trièdre mobile. — Les résultats précédents permettent d'appliquer à l'étude d'une courbe ou d'une surface les résultats obtenus dans l'étude de la cinématique du corps solide; il suffit, comme

l'ont fait Ribaucour et Darboux, d'attacher à la courbe ou à la surface un trièdre mobile convenablement choisi.

Nous allons développer cette méthode dans le cas des courbes. Considérons (*fig.* 27) une courbe gauche C, et le

Fig. 27.



trièdre de Frenet MTNB attaché en un point M de cette courbe. Soient $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ les vecteurs unitaires de ce trièdre.

Si l'on suppose que le point M décrit la courbe C avec une vitesse égale à 1, c'est-à-dire suivant la loi $s = t$ (en choisissant convenablement l'origine des arcs sur c), le trièdre de Frenet a un certain mouvement que nous allons déterminer.

Par hypothèse, on a d'abord

$$\xi = 1, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0.$$

D'autre part, les formules de Frenet s'écrivent, sous forme vectorielle,

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R},$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\vec{n}}{T},$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{R} - \frac{\vec{b}}{T},$$

R et T étant les rayons de courbure et de torsion de la courbe.

D'autre part, si $\vec{\omega}$ est le vecteur rotation instantanée du

trièdre, on a, puisque l'arc est égal au temps,

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \overrightarrow{\omega . t},$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \overrightarrow{\omega . b},$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \overrightarrow{\omega . n}.$$

Donc on a les formules

$$\frac{\vec{n}}{R} = \overrightarrow{\omega . t},$$

$$\frac{\vec{n}}{T} = \overrightarrow{\omega . b},$$

$$-\frac{\vec{t}}{R} - \frac{\vec{b}}{T} = \overrightarrow{\omega . n}.$$

Les deux premières formules montrent que $\vec{\omega}$ est perpendiculaire à $\vec{n}$, donc $q = 0$, et l'on a

$$\vec{\omega} = p . \vec{t} + r . \vec{b}.$$

Si l'on porte alors cette valeur dans les deux premières relations précédentes, il vient

$$\frac{\vec{n}}{R} = p . \overrightarrow{t . t} + r . \overrightarrow{b . t} = r . \overrightarrow{b . t},$$

$$\frac{\vec{n}}{T} = p . \overrightarrow{t . b} + r . \overrightarrow{b . b} = p . \overrightarrow{t . b},$$

et, comme

$$\vec{n} = \overrightarrow{b . t} = - \overrightarrow{t . b},$$

on a

$$\frac{\vec{n}}{R} = \overrightarrow{r . n},$$

$$\frac{\vec{n}}{T} = - \overrightarrow{p . n}.$$

Donc les composantes de $\vec{\omega}$ sur le trièdre de Frenet sont

$$p = -\frac{1}{T}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{1}{R}.$$

Réciproquement, si l'on a un trièdre mobile pour lequel

$$\xi = 1, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0, \qquad q = 0,$$

le trièdre est le trièdre de Frenet de la trajectoire de son origine, et les rayons de courbure et de torsion de cette trajectoire sont donnés par

$$R = \frac{1}{r}, \qquad T = -\frac{1}{p}.$$

Le calcul précédent montre que, si l'on considère un point P, de coordonnées X, Y, Z par rapport au trièdre de Frenet (le point pouvant d'ailleurs être mobile par rapport au trièdre), les composantes de sa vitesse absolue sur le trièdre de Frenet sont

$$V_X = \xi + qZ - rY + \frac{dX}{ds} = \frac{dX}{ds} + 1 - \frac{Y}{R},$$

$$V_Y = \eta + rX - pZ + \frac{dY}{ds} = \frac{dY}{ds} + \frac{X}{R} + \frac{Z}{T},$$

$$V_Z = \zeta + pY - qX + \frac{dZ}{ds} = \frac{dZ}{ds} - \frac{Y}{T}.$$

Ces formules permettent de traiter un certain nombre de problèmes relatifs aux courbes gauches.

1° *Trouver la caractéristique du plan normal.* — Si l'on considère un point P qui se déplace en restant toujours sur la caractéristique du plan normal, c'est-à-dire en restant sur la surface enveloppe du plan normal, sa vitesse est à chaque instant située dans le plan normal, et réciproquement. Exprimons donc qu'on a $X = 0$ et $V_X = 0$, ce qui se réduit à

$$1 - \frac{Y}{R} = 0, \qquad Y = R.$$

La droite caractéristique du plan normal est donc la parallèle à la binormale menée par le centre de courbure, c'est-à-dire la droite polaire.

2° *Développées des courbes gauches.* — Cherchons si l'on peut faire varier avec le point M une des normales MP à la courbe, suivant une loi telle qu'elle enveloppe une courbe. Si c'est possible, soit P le point de contact de MP et de son enveloppe. La vitesse absolue du point P doit être dirigée suivant MP, et réciproquement.

Comme P est dans le plan normal, on doit avoir

$$X = 0, \qquad \frac{V_X}{0} = \frac{V_Y}{Y} = \frac{V_Z}{Z},$$

c'est-à-dire d'abord $1 - \frac{Y}{R} = 0$; le point P est sur la droite polaire.

Puis

$$\frac{Y' + \frac{Z}{T}}{Y} = \frac{Z' - \frac{Y}{T}}{Z}$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$Y\frac{dZ}{ds} - Z\frac{dY}{ds} = \frac{Y^2 + Z^2}{T}$$

ou

$$\frac{Y\,dZ - Z\,dY}{Y^2 + Z^2} = \frac{ds}{T},$$

ce qui s'intègre de suite, car on peut l'écrire

$$d\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{Z}{Y}\right) = \frac{ds}{T},$$

d'où

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{Z}{Y} = \int \frac{ds}{T}.$$

Si l'on appelle φ l'angle de MN et de MP, on a

$$\varphi = \text{arc tang}\,\frac{Z}{Y} \qquad (\text{à } k\pi \text{ près}).$$

Donc

$$\varphi = \int \frac{ds}{T}.$$

On voit par ces deux exemples que la méthode cinématique conduit à des calculs plus simples en général que ceux auxquels on arrive par la méthode analytique. On trouvera dans les *Leçons* de Darboux, de nombreuses applications de cette méthode à la théorie des courbes et des surfaces.

CHAPITRE V.

ÉTUDE APPROFONDIE DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE.

Les résultats généraux que nous avons obtenus au Chapitre II sont relatifs à l'étude des propriétés différentielles du mouvement d'un corps solide. Dans ce Chapitre, nous allons, en nous appuyant sur ces résultats et sur ceux obtenus aux Chapitres III et IV, étudier les propriétés finies de ce mouvement.

Cette étude fait intervenir d'importantes notions géométriques, qui seront pleinement mises en lumière par la considération de deux cas particuliers très importants : le cas où un plan du solide glisse sur un plan fixe, et le cas où le solide a un point fixe.

PREMIÈRE PARTIE.

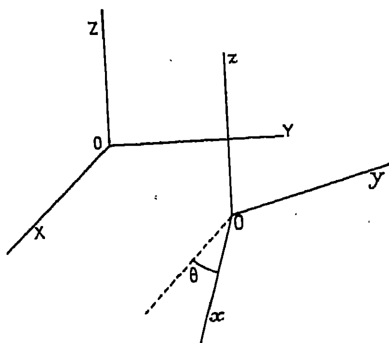
Mouvement d'une figure plane.

Lorsqu'un plan Π du corps glisse sur lui-même, tous les plans du solide parallèles à Π glissent respectivement sur eux-mêmes. La trajectoire d'un point M quelconque du corps se déduit par la translation $\overrightarrow{m\mathrm{M}}$ de celle de sa projection m sur Π. Il suffit donc d'étudier le mouvement des points de Π.

Nous prendrons comme trièdre fixe un trièdre OXYZ (nous changeons ici les notations des Chapitres précédents pour nous conformer à l'usage), dont le plan des XOY sera le plan fixe Π_0 sur lequel glisse le plan Π. Le trièdre mobile $oxyz$ sera un trièdre dont le plan des xoy est confondu avec le plan Π. Les deux trièdres ont donc même direction pour l'axe Oz et l'axe oz (*fig.* 28).

La position du trièdre mobile par rapport au trièdre fixe est déterminée par la position des axes xoy par rapport à XOY. Ces axes sont déterminés par les coordonnées X_0, Y_0 de o par

Fig. 28.



rapport à XOY, et par l'angle $\theta = (\widehat{OX, ox})$. Un point M du plan Π, dont les coordonnées par rapport à oxy sont (x, y) aura pour coordonnées par rapport aux axes fixes

$$X = X_0 + x\cos\theta - y\sin\theta,$$
$$Y = Y_0 + x\sin\theta + y\cos\theta.$$

A. **Propriétés du premier ordre. Vitesses. Trajectoires.** — Soient ξ, η, ζ les composantes de la vitesse de o; p, q, r celles de la rotation instantanée de $oxyz$, *sur ces axes* $oxyz$. Les composantes sur $oxyz$ de la vitesse d'un point M quelconque du corps sont données par les formules classiques

$$V_x = \xi + qz - ry,$$
$$V_y = \eta + rx - pz,$$
$$V_z = \zeta + py - qx.$$

Comme $V_z = 0$ quel que soit le point M, on a identiquemen

$$\zeta = 0, \qquad p = 0, \qquad q = 0$$

et les composantes de la vitesse de M sur les axes mobile

sont donc

$$V_x = \xi - ry,$$
$$V_y = \eta + rx,$$
$$V_z = 0,$$

ou, puisque ici $r = \omega$, en désignant par $\vec{\omega}$ le vecteur rotation,

$$(1) \quad \begin{cases} V_x = \xi - \omega y, \\ V_x = \eta + \omega x, \\ V_z = 0, \end{cases}$$

on a d'ailleurs

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Les composantes de la vitesse de M sur les axes fixes seront

$$X' = X'_0 - \theta'(Y - Y_0) = X'_0 - \omega(Y - Y_0),$$
$$Y' = Y'_0 + \theta'(X - X_0) = Y'_0 + \omega(X - X_0).$$

On voit que le vecteur $\vec{V}_0$, vitesse de o, et le vecteur rotation $\vec{\omega}$, sont rectangulaires. Le mouvement instantané est donc toujours une rotation, sauf dans le cas où $\omega = 0$, auquel cas le mouvement instantané est une translation.

Nous écarterons ce cas, et nous supposerons toujours, sauf avis contraire, que $\omega \neq 0$.

Cherchons alors l'axe instantané de rotation. C'est évidemment une droite parallèle à $\vec{\omega}$, c'est-à-dire perpendiculaire au plan Π.

Soit I sa trace sur le plan Π. Ce point est déterminé par la condition que sa vitesse est nulle à l'instant t. Si x_1, y_1 sont les coordonnées de I par rapport aux axes mobiles, cette condition s'écrit

$$\xi - \omega y_1 = 0,$$
$$\eta + \omega x_1 = 0;$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{\eta}{\omega}, \\ y_1 = \dfrac{\xi}{\omega}. \end{cases}$$

Dans le système d'axes fixes, les coordonnées X_1, Y_1 de I sont déterminées par la même condition, qui s'écrit

$$(3) \qquad \begin{cases} X_1 - X_0 = -\dfrac{Y_0'}{\omega}, \\ Y_1 - Y_0 = \dfrac{X_0'}{\omega}. \end{cases}$$

D'après les propriétés du mouvement tangent de rotation, la vitesse de tout point M du plan mobile est perpendiculaire à la droite MI. C'est d'ailleurs immédiat analytiquement, puisqu'en remplaçant, dans la formule (1), ξ et η par leurs valeurs tirées de (2), on a

$$V_x = -\omega(y - y_1),$$
$$V_y = \quad \omega(x - x_1).$$

Donc, les normales aux trajectoires de tous les points de la figure à l'instant t passent par le point I (¹).

Le point I est appelé *centre instantané de rotation* à l'instant t. La propriété géométrique qui précède conduit à se demander si le point I est indépendant de la loi du mouvement de oxy en fonction du temps, c'est-à-dire s'il ne change pas lorsque tous les points du corps décrivent les mêmes trajectoires, mais avec des vitesses différentes. Cela revient à changer la loi qui fait dépendre θ du temps, sans changer les relations entre ξ, η et θ, relations qu'on obtient en éliminant le temps entre l'expression de ces trois quantités.

Il en est bien ainsi. En effet, si dans la relation $\theta = f(t)$ on fait un changement de variable $t = \varphi(t_1)$, les formules (3) ne changent pas, car

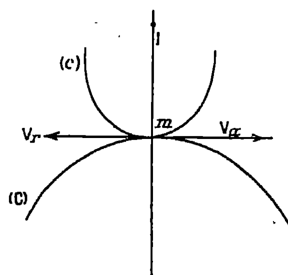
$$\frac{X_0'}{\omega} = \frac{\dfrac{dX_0}{dt}}{\dfrac{d\theta}{dt}} = \frac{dX_0}{d\theta} \qquad \text{et de même} \qquad \frac{Y_0'}{\omega} = \frac{dY_0}{d\theta}.$$

(¹) Lorsque $\omega = 0$ le mouvement tangent est une translation, les normales vont concourir en un point à l'infini. Nous disons que I est à l'infini dans la direction de ces normales.

Nous venons de trouver une propriété commune aux *trajectoires* de tous les points de la figure mobile. Corrélativement, étudions le mouvement d'une courbe (c) invariablement liée à la figure mobile.

La succession des positions de cette courbe dans le plan fixe, lorsque le plan mobile se déplace, forme une famille de courbes, ayant une enveloppe (C). Cherchons à déterminer à l'instant t, les points caractéristiques de la courbe (c), c'est-à-dire les points où (c) touche son enveloppe (C). Soit m un de ces points (*fig.* 29). Lorsque le plan mobile se déplace,

Fig. 29.



le point caractéristique m se déplace sur la courbe (c) en général. D'autre part, le point se déplace aussi sur la courbe enveloppe (C). Le mouvement du point m sur (C) est le mouvement absolu de ce point dans le plan fixe. Il résulte de la composition du mouvement de m sur (c) (mouvement relatif) et du mouvement de (c), c'est-à-dire du mouvement de la figure mobile (mouvement d'entraînement). Donc la vitesse absolue de m est égale à la somme géométrique de sa vitesse relative et de sa vitesse d'entraînement. Mais la vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}$ de m est portée par la tangente en m à (C); sa vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$ est portée par la tangente en m à (c). Comme (C) et (c) sont tangentes en m, $\overrightarrow{V_a}$ et $\overrightarrow{V_r}$ sont deux vecteurs portés par une même droite. Donc, leur différence

géométrique, c'est-à-dire la vitesse d'entraînement $\vec{V_e}$ est aussi portée par la tangente commune à (c) et (C). Mais $\vec{V_e}$ est la vitesse d'un point M du plan mobile coïncidant à l'instant t avec m. Donc *la perpendiculaire à* $\vec{V_e}$ *en* m, *c'est-à-dire la normale commune à* (c) *et* (C), *passe par le centre instantané de rotation* I.

On a supposé $\vec{V_a} \neq \vec{V_r}$; si $\vec{V_a} = \vec{V_r}$, $\vec{V_e} = 0$, le point m est confondu avec I. De toute manière, *la normale commune passe encore par* I. Réciproquement, si m est le pied d'une normale abaissée de I sur (c), le raisonnement précédent repris en sens inverse montre que m est un point caractéristique de (c).

Le raisonnement s'étend aussi au cas où ω étant nul, I est à l'infini dans une certaine direction : la normale à (c) en m devra être parallèle à cette direction.

Si l'on considère le mouvement inverse du mouvement donné, c'est-à-dire le mouvement de XOY par rapport à xoy, on sait que *le centre instantané de rotation ne change pas.* La courbe (C) a alors comme enveloppe la courbe (c). (C) et (c) sont appelés *profils conjugués.*

Rappelons la définition du *roulement* d'une courbe sur une autre. Soient c_1 une courbe fixe, c_2 une courbe mobile de forme invariable, ces deux courbes étant supposées orientées. On dit que c_2 roule sur c_1 lorsque à chaque instant les deux courbes sont tangentes en un point I, les deux demi-tangentes positives coïncidant, et lorsque de plus, en appelant s_1 et s_2 les abscisses curvilignes de I sur c_1 et c_2, on a

$$s_1 - s_2 = \text{const.}$$

Cette définition étant rappelée, en général les courbes (c) et (C) ne roulent pas l'une sur l'autre. Orientons en effet ces courbes de façon que les demi-tangentes positives coïncident. Si s et S sont les abscisses curvilignes du point de contact m

sur (c) et (C) respectivement, les mesures de la vitesse absolue et de la vitesse relative de m sur la direction des demi-tangentes positives sont

$$V_a = \frac{dS}{dt}, \qquad V_r = \frac{ds}{dt}.$$

Donc on a

$$\frac{dS}{dt} - \frac{ds}{dt} = V_e = \omega . \overline{IM} \qquad \text{(au signe près)};$$

donc

$$\frac{d}{dt}(S - s) \neq 0$$

si $Im \neq 0$, c'est-à-dire si le point I n'est pas en m. Donc il n'y a pas en général roulement de (c) sur (C). Il n'en serait ainsi que si I était constamment en m.

Ceci nous conduit alors à envisager le cas où I est constamment en m, c'est-à-dire à considérer le lieu de I dans le plan XOY et dans le plan xoy.

Le point I varie en général dans le plan mobile; soit I_m la courbe qu'il décrit dans ce plan. Il est aussi mobile par rappor au plan fixe. Soit I_f la courbe qu'il décrit dans ce plan. Les raisonnements précédents montrent :

1° que I_m *a pour enveloppe* I_f puisque $V_e = 0$ au point I;
2° que I_m *roule sur* I_f.

On voit donc qu'à tout mouvement d'un plan sur un plan (le mouvement de translation excepté) correspondent deux courbes roulant l'une sur l'autre; réciproquement, la donnée de ces deux courbes et de leur position initiale définit complètement la succession géométrique des positions du plan mobile; pour définir de plus leur succession dans le temps, il faut en outre se donner par exemple l'abscisse curviligne de I sur l'une des courbes I_m ou I_f en fonction du temps.

I_f s'appelle la *base* du mouvement, I_m la *roulante*. La tra-

jectoire d'un point quelconque du plan mobile est une *roulette*.

Lorsqu'on passe du mouvement direct $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$ au mouvement inverse $\left(\frac{\Pi_0}{\Pi}\right)$, I ne change pas, mais la nouvelle base est I_m, la nouvelle roulante est I_f, les deux vitesses angulaires instantanées ω_1 et ω sont opposées $\omega_1 = -\omega$.

Si dans le mouvement direct $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$, (c) avait pour enveloppe (C), dans le mouvement inverse $\left(\frac{\Pi_0}{\Pi}\right)$, (C) aura pour enveloppe (c). En particulier, si (c) se réduit à un point M, (C) est la roulette de M dans le mouvement $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$. Dans le mouvement inverse, (C) de Π_0 passera par un point M de Π, invariable par rapport à Π. La normale à (C) en M passait par I dans le mouvement direct $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$, on en déduit la proposition corrélative suivante, par la considération du mouvement inverse : *Si dans un mouvement* $\left(\frac{\Pi_0}{\Pi}\right)$ *de plan sur plan une courbe* (C) *de* Π_0 *passe par un point* M *invariable dans* Π, *la normale à* (C) *en* M *passe par le centre instantané de rotation.*

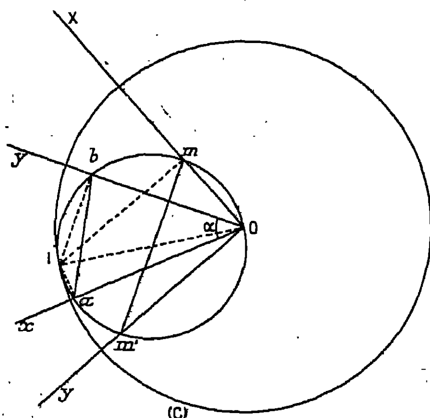
Si au lieu de se borner au mouvement de Π par rapport à Π_0 on envisage le mouvement du corps solide S lié à Π par rapport à l'espace S_0 lié à Π_0, on voit qu'il faut considérer les deux cylindres dont I_f et I_m sont les sections droites : cylindre base et cylindre roulant, le mouvement instantané sera une rotation autour de la génératrice de contact $I\delta$ de ces deux cylindres.

Applications et exemples simples. — Les résultats précédents montrent que les propriétés géométriques essentielles du mouvement ne dépendent que des trajectoires des points du plan mobile, et non pas de la manière dont ces trajectoires

sont parcourues. Pour déterminer le mouvement au point de vue géométrique, il suffira par exemple de se donner les trajectoires de deux points du plan, ou bien les enveloppes de deux courbes, ou encore la trajectoire d'un point et l'enveloppe d'une courbe. On en déduira la base et la roulante. Nous allons donner quelques exemples simples de problèmes de cette nature.

1° *Deux points de la figure mobile décrivent deux droites du plan fixe.* — Écartons le cas où les deux droites sont parallèles; le mouvement serait alors une translation. Soient donc ox, oy les droites fixes que décrivent les points a et b de la figure mobile (*fig.* 30). ab est donc une longueur constante, soit $ab = l$.

Fig. 30.



Le point a décrivant ox, la normale en a à ox passe par le centre instantané I. De même pour la normale en b à oy. I est donc à l'intersection de ces deux droites. Si l'on considère le cercle circonscrit au triangle oab, I est donc le point diamétralement opposé à o sur ce cercle.

Mais, si l'on pose $\widehat{xoy} = \alpha$, on sait que le diamètre du

cercle oab est égal à $\frac{l}{\sin\alpha}$. Donc

$$oI = \frac{l}{\sin\alpha} = \text{const.}$$

Ceci montre que, dans le plan fixe, I décrit le cercle (C) de centre o et de rayon $\frac{l}{\sin\alpha}$. C'est la *base du mouvement*.

D'autre part, si l'on considère comme faisant partie de la figure mobile le cercle oab, de grandeur constante, comme le point I est toujours sur ce cercle, c'est la *roulante du mouvement*. Soit (c) ce cercle, de rayon moitié du cercle (C).

Un point quelconque m de la roulante décrit un segment de droite passant par o, car la normale en m a sa trajectoire passant par I, la tangente passe constamment par o.

En particulier, deux points m et m', diamétralement opposés sur (c), décrivent des droites rectangulaires oX et oY. Comme les points m et m' sont des points liés à la figure mobile, la longueur mm' est constante, et l'on voit qu'on peut considérer le mouvement comme engendré par un segment de longueur fixe dont les extrémités se déplacent sur deux droites rectangulaires fixes oX et oY.

De cette génération, il résulte qu'un point quelconque de la figure mobile décrit une ellipse de centre o.

Dans le mouvement inverse, le cercle (C) roule sur un cercle (c) de rayon moitié qu'il contient; tout diamètre lié au cercle (C) passe alors par un point invariable du cercle (c).

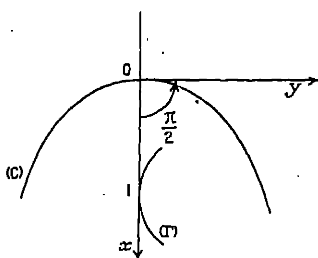
2° *Déplacement du repère rectangulaire mobile d'une courbe plane* (C). — Soit une courbe plane (C), o un point mobile sur cette courbe (*fig.* 31). Le repère de cette courbe au point o est formé par la demi-tangente positive oy et la demi-normale ox obtenue en faisant tourner oy de $-\frac{\pi}{2}$ autour de o (en ajoutant la perpendiculaire au plan de la courbe en o, on a le trièdre de Frenet).

Lorsque le point o se déplace sur la courbe (C) le repère

attaché en o prend un certain mouvement qu'on se propose d'étudier.

Le point o décrivant la courbe (C), le centre instantané I se

Fig. 31.



trouve sur la normale en o à C, c'est-à-dire sur ox. Comme ox est une droite liée au plan mobile, c'est la *roulante* du mouvement.

De plus, lorsque o varie, la droite ox enveloppe la développée de (C); soit (Γ) cette courbe. Comme le centre instantané se trouve sur la normale à ox menée par le point où ox touche (Γ), et puisqu'il est sur ox, il est confondu avec le point de contact de ox et de (Γ). Donc (Γ) est la *base du mouvement.*

On voit donc qu'on obtient le résultat suivant: *la normale roule sur la développée.*

On peut encore dire que si l'on considère la courbe (Γ), et une de ses tangentes qui roule sur elle, le lieu d'un point quelconque de cette tangente est une dévoloppante de (Γ).

En considérant le mouvement inverse du mouvement précédent, la propriété précédente s'énonce ainsi : « Si l'on considère une courbe (Γ) qui roule sur une droite Δ, toutes les développantes de (Γ) passent par des points fixes de Δ. »

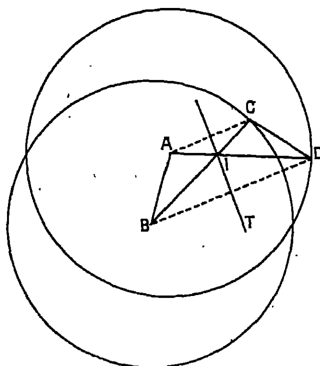
3° *Contre-parallélogramme articulé.* — Considérons un quadrilatère concave ABCD, dont les côtés opposés sont

égaux deux à deux (*fig.* 32),

$$AB = CD = a,$$
$$AD = BC = b.$$

Un tel quadrilatère s'appelle *contre-parallélogramme*. Supposons qu'aux sommets de ce contre-parallélogramme se trouvent des articulations permettant aux côtés aboutissant à

Fig. 32.



un même sommet de former un angle de grandeur arbitraire. Si l'on fixe deux des sommets, A et B par exemple, le système formé par les trois tiges BC, CD, DA dépend d'un paramètre. Si l'on donne à l'une un certain mouvement, il en résulte pour les deux autres des mouvements bien déterminés. En particulier, le point C décrit un cercle de centre B et de rayon b. Le point D décrit un cercle de centre A et de rayon b. On peut donc encore considérer le mouvement CD comme le mouvement d'un segment de longueur a dont les deux extrémités décrivent les deux cercles précédents. Cherchons la roulante et la base de ce mouvement.

Le centre instantané I est à la rencontre des normales en C et D aux deux cercles, c'est-à-dire au point de concours des droites AD et BC. Si l'on suppose $a < b$, I se trouve effectivement sur les segments AD et BC. Menons AC et BD. Les

triangles ACD et ABC sont égaux, donc AIC est un triangle isoscèle. De même BID est isoscèle. Donc la figure est symétrique par rapport à la droite IT, bissectrice de l'angle AIC. On a donc

$$IA + IB = IA + ID = AD = b,$$

ce qui montre que, dans le plan fixe, I décrit une ellipse de foyers A et B. D'ailleurs, la tangente en I à cette ellipse est la droite IT.

De même, on a

$$IC + ID = IC + IB = BC = b.$$

Donc, dans le plan mobile, le point I décrit une ellipse égale à la précédente, et symétrique à chaque instant de celle-ci par rapport à la tangente commune IT. Donc le mouvement est obtenu en faisant rouler l'une sur l'autre deux ellipses égales, de façon qu'elles restent constamment symétriques par rapport à leur tangente commune; il suffit d'ailleurs pour cela qu'elles vérifient cette condition à l'instant initial.

Si l'on avait $a > b$, on verrait aisément que la roulante et la base sont alors des hyperboles symétriques par rapport à leur tangente commune.

4° Une droite du plan mobile a pour enveloppe un cercle. Un point de la droite décrit une tangente fixe au cercle.

Fig. 33.

Soient Δ la droite mobile, Γ le cercle fixe de centre O, D la tangente fixe à ce cercle, A son point de contact (*fig.* 33).

Soient B le point de Δ décrivant D, C le point où touche Γ. Le centre instantané se trouve sur la normale en B à D et sur la normale en C à Γ, c'est-à-dire sur OC. Donc il est à l'intersection de OC et de la parallèle à OA menée par B.

Les angles $\widehat{BOA}$ et $\widehat{BOC}$ sont égaux, puisque les triangles BOA et BOC sont égaux. D'autre part

$$\widehat{BOA} = \widehat{OBI}$$

comme alternes internes. Donc

$$\widehat{BOI} = \widehat{OBI},$$

le triangle OBI est isoscèle,

$$OI = IB.$$

Donc, dans le plan fixe, le point décrit une parabole de foyer O et de directrice D.

D'autre part, le point O, considéré comme faisant partie de la figure mobile, reste à une distance $OC = R =$ const. de la droite Δ. Donc O décrit dans le plan mobile la droite δ parallèle à Δ et à une distance R de cette droite.

Comme on a

$$BI = IO,$$

on voit que I décrit dans le plan mobile une parabole de foyer B et de directrice δ.

Ces paraboles sont d'ailleurs à chaque instant symétriques par rapport à leur tangente commune IT.

B. **Propriétés du deuxième ordre. Accélérations. Courbures.** — Cherchons, à l'instant t, l'accélération d'un point M invariablement lié au plan mobile.

Si l'on appelle γ_x et γ_y les projections de cette accélération sur les axes mobiles, les formules de Bour donnent

$$\gamma_x = \frac{dV_x}{dt} - \omega V_y,$$

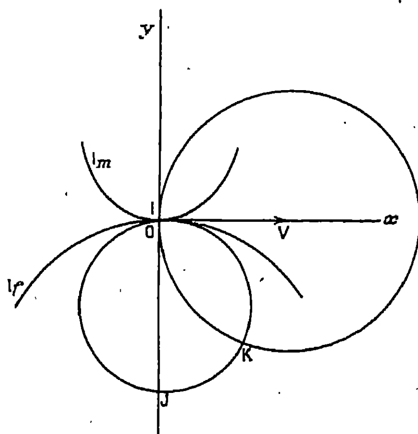
$$\gamma_y = \frac{dV_y}{dt} + \omega V_x,$$

et, d'après l'expression de V_x et V_y, on a

$$(4) \quad \begin{cases} \gamma_x = \xi' - \omega' y - \omega(\eta + \omega x) = \xi' - \omega\eta - \omega^2 x - \omega' y, \\ \gamma_y = \eta' - \omega' x + \omega(\xi - \omega y) = \eta' + \omega\xi - \omega^2 y + \omega' x. \end{cases}$$

Pour simplifier l'étude de ces formules *à l'instant t*, on peut toujours supposer que les axes mobiles ont été choisis de façon qu'à l'instant t l'origine o soit confondue avec le centre instantané I, l'axe ox étant la tangente commune en ce point à la base et à la roulante (*fig.* 34). On a pour les coor-

Fig. 34.



données de I à l'instant t, $x_1 = y_1 = 0$, ce qui, en se reportant aux formules (2), donne $\xi = \eta = 0$.

D'autre part, la vitesse relative [1] de I doit être dirigée suivant ox. Or, ses composantes sont

$$x'_1 = -\frac{\eta'}{\omega} + \frac{\eta\omega'}{\omega^2},$$

$$y'_1 = \frac{\xi'}{\omega} - \frac{\xi\omega'}{\omega^2}.$$

(1) Notons que la vitesse d'entraînement étant nulle, sa vitesse absolue et sa vitesse relative sont égales.

On doit avoir $y'_1 = 0$, ce qui, avec les conditions précédentes, donne à l'instant t, $\xi' = 0$. Si l'on appelle V la vitesse de I sur ses trajectoires à l'instant considéré, on a

$$V = -\frac{\eta'}{\omega} \quad \text{ou} \quad \eta' = -V\omega,$$

en supposant que ox est dirigée suivant la demi-tangente positive aux courbes I_m et I_f; V *est alors la mesure de la vitesse sur* ox.

En portant ces valeurs dans les formules (4), celles-ci se simplifient et deviennent

$$(5) \quad \begin{cases} \gamma_x = \quad\quad\quad -\omega^2 x - \omega' y, \\ \gamma_y = -V\omega - \omega^2 y + \omega' x. \end{cases}$$

Nous avons vu, au Chapitre I, que l'accélération d'un point est liée aux éléments différentiels du deuxième ordre de la trajectoire de ce point. Les formules (5) vont nous permettre d'étudier ces éléments.

Cherchons, par exemple, la *condition pour que le point* M *soit un point d'inflexion sur sa trajectoire à l'instant t.* Il faut et il suffit pour cela que le rayon de courbure R soit infini, c'est-à-dire que l'accélération normale de M soit nulle, puisque cette accélération a pour expression $\frac{v^2}{R}$, et puisque $v \neq 0$ si M n'est pas confondu avec le centre instantané.

Exprimons donc que l'accélération normale de M est nulle, ou, ce qui revient au même, que l'accélération et la vitesse ont la même direction; ceci s'écrit

$$\frac{\gamma_x}{V_x} = \frac{\gamma_y}{V_y}$$

ou, d'après les formules (1) et (5),

$$\frac{-\omega^2 x - \omega' y}{-\omega y} = \frac{-V\omega - \omega^2 y + \omega' x}{\omega x}$$

et, en rendant entier,

$$\omega^2(x^2 + y^2) + V\omega y = 0$$

ou encore

$$x^2+y^2 + \frac{V}{\omega} y = 0.$$

Donc le lieu des points du plan qui sont points d'inflexion de leur trajectoire à l'instant t est le cercle précédent, tangent en O à l'axe ox. Ce cercle est appelé *cercle des inflexions*.

D'après la propriété géométrique des points de ce cercle, on peut prévoir qu'*il ne dépend pas de la loi du mouvement en fonction du temps*. On peut d'ailleurs le vérifier. La position de ce cercle dépend de la quantité $\frac{V}{\omega}$. Or, si S est l'abscisse curviligne de I sur la base, on a

$$V = \frac{dS}{dt}, \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt},$$

d'où

$$\frac{V}{\omega} = \frac{\frac{dS}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{dS}{d\theta},$$

quantité qui ne change pas quand on fait sur t un changement de variable.

On peut chercher aussi le lieu des points du plan mobile *dont l'accélération tangentielle est nulle à l'instant t*, ou encore, ce qui revient au même, dont la vitesse et l'accélération sont perpendiculaires. Cette condition s'écrit

$$V_x \gamma_x + V_y \gamma_y = 0$$

ou, en développant,

$$\omega y(\omega^2 x + \omega' y) + \omega x(- V\omega - \omega^2 y + \omega x) =$$

ou encore

$$\omega\omega'(x^2+y^2) - V\omega^2 x = 0.$$

Si $\omega' \neq 0$, ce lieu est le cercle Γ

$$x^2+y^2 - \frac{V\omega}{\omega'} x = 0$$

Si $\omega' = 0$, c'est l'axe des oy.

Dans le cas général, le cercle (Γ) est tangent en o à l'axe oy, donc orthogonal au cercle des inflexions.

Contrairement au cercle des inflexions, ce cercle dépend de la loi du mouvement dans le temps. En effet, sa position dépend de la quantité $\frac{V\omega}{\omega'}$. Or, si l'on fait sur t un changement de variable $t = \varphi(t_1)$, on a

$$V_1 = \frac{ds}{dt_1} = \frac{ds}{dt}\frac{dt}{dt_1} = V\varphi'(t_1), \qquad \omega_1 = \frac{d\theta}{dt_1} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dt_1} = \omega\varphi'(t_1),$$

$$\omega'_1 = \frac{d\omega_1}{dt_1} = \frac{d\omega}{dt_1}\varphi'(t_1) + \omega\varphi''(t_1)$$

$$= \frac{d\omega}{dt}\frac{dt}{dt_1}\varphi'(t_1) + \omega\varphi''(t_1) = \omega'[\varphi'(t_1)]^2 + \omega\varphi''(t_1).$$

Donc

$$\frac{V_1\omega_1}{\omega'_1} = \frac{V\omega[\varphi'(t_1)]^2}{\omega'[\varphi'(t_1)]^2 + \omega\varphi''(t_1)},$$

expression qui n'est pas identique à $\frac{V\omega}{\omega'}$ quelle que soit la fonction φ.

Le cercle des inflexions coupe le cercle (Γ) au point o et en un deuxième point K; comme pour ce point l'accélération normale et l'accélération tangentielle sont nulles, le vecteur accélération est nul, ce point est appelé *centre des accélérations* à l'instant t. On peut démontrer qu'au point de vue des accélérations, tout se passe comme si le plan mobile tournait à l'instant t autour du point K, la vitesse angulaire étant ω et l'accélération angulaire ω'.

L'existence de ce point est d'ailleurs un cas particulier d'un résultat plus général démontré à la fin du Chapitre II.

Remarquons enfin que, de même que le cercle (Γ), le point K dépend de la loi du mouvement dans le temps; il décrit le cercle des inflexions lorsque la loi du temps varie.

Courbures. — Plus généralement, proposons-nous de chercher la courbure de l'enveloppe (C) d'une courbe (c) du plan mobile au point M où les deux courbes se touchent à

l'instant t. Ce problème comprend comme cas particulier la recherche de la courbure de la trajectoire d'un point, en supposant que la courbe c se réduise à un point.

On pourrait faire cette recherche par le calcul en utilisant la relation

$$\gamma_N = \frac{v^2}{R}$$

entre l'accélération normale γ_N, la vitesse v et le rayon de courbure R de la trajectoire d'un point. Nous préférons employer une méthode géométrique, qui nous conduira directement à une construction du centre de courbure de (C). Cette méthode a été donnée par M. Kœnigs (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1907).

Nous aurons besoin, pour l'exposé de cette méthode, d'une proposition préliminaire, d'ailleurs intéressante en elle-même.

Lemme. — Soient (*fig.* 35) Π un plan mobile glissant sur

Fig. 35.



un plan fixe Π_0, I le centre instantané de ce mouvement à l'instant t. Soit Π' un second plan mobile glissant sur le plan Π considéré comme fixe, et soit I' le centre instantané de ce mouvement à l'instant t. Le plan Π' glisse aussi sur le plan fixe Π_0, et son mouvement par rapport à Π_0 résulte du mouvement relatif $\left(\frac{\Pi'}{\Pi}\right)$ et du mouvement d'entraînement $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$. Soit I'' le centre instantané, à l'instant t, du mouvement $\left(\frac{\Pi'}{\Pi_0}\right)$.

Les trois points I, I', I'' *sont en ligne droite.*

En effet soit M un point du plan Π', se trouvant, à l'instant t, sur la droite II'. La vitesse relative $\vec{V}_r$ est perpendiculaire à I'M, donc à II'. De même, sa vitesse d'entraînement $\vec{V}_e$ est perpendiculaire à IM, donc à II'. Donc sa vitesse absolue,

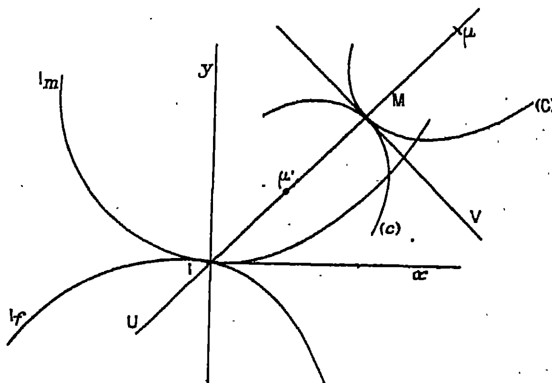
$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r,$$

est, ou bien nulle, ou bien perpendiculaire à II'.

Dans le premier cas, le point M est confondu avec I''. Dans le second cas, le point I'' se trouve sur la perpendiculaire à $\vec{V}_a$ menée par M, c'est-à-dire sur II'. Donc la proposition est démontrée.

Ceci posé, reprenons le mouvement du plan Π par rapport à un plan fixe Π_0. Soient I le centre instantané de rotation, (c. i. r.) I_m la roulante, I_f la base, I_{xy} le repère commun aux deux courbes au point I (*fig.* 36).

Fig. 36.



Soient (c) une courbe du plan Π, (C) son enveloppe, M leur point de contact à l'instant t. Soit MUV le repère commun à ces deux courbes au point M, MU étant la normale commune, MV la tangente commune. Nous avons vu que MU passe par le point I.

Quand le temps varie, les courbes I_f et (C) restent fixes, les repères respectifs Ixy et MUV varient.

Considérons le *mouvement du repère* MUV *par rapport au repère* Ixy. On peut le considérer comme résultant du mouvement de MUV par rapport au plan Π_0, et du mouvement du plan Π_0 par rapport à Ixy. Donc les c. i. r. de ces trois mouvements sont en ligne droite.

Or, le c. i. r. du mouvement de MUV par rapport au plan Π_0 est le centre de courbure de la courbe (C) au point M. Soit μ ce point.

Le c. i. r. du mouvement de Π_0 par rapport à Ixy est le même que le c. i. r. du mouvement inverse. C'est donc le point O_f, centre de courbure de la courbe I_f au point I.

Donc, le *centre instantané* ξ *du mouvement de* MUV *par rapport à* Ixy *se trouve sur la droite* μO_f.

Mais on peut considérer aussi le mouvement de MUV par rapport à Ixy comme résultant du mouvement de MUV par rapport au plan Π et du mouvement du plan π par rapport à Iyx. Donc le point ξ est aussi sur la droite qui joint les c. i. r. de ces deux derniers mouvements.

Or, par rapport au plan Π, le point M décrit la courbe (c), MUV est le repère mobile de cette courbe, donc le c. i. r. du mouvement de MUV par rapport à Π est le centre de courbure μ' de la courbe (c) au point M.

Le c. i. r. du mouvement de Π par rapport à Ixy est le même que le c. i. r. du mouvement inverse.

Or, par rapport au plan Π, Ixy est le repère mobile de la courbe I_m. Donc le c. i. r. est le point O_m, centre de courbure de I_m au point I.

Donc *le point* ξ *est sur la droite* $\mu' O_m$.

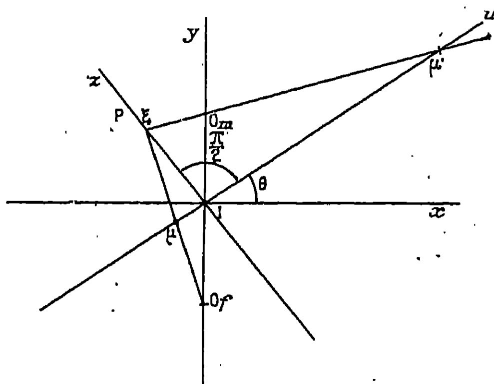
Enfin, dans le mouvement de MUV par rapport à Ixy, la droite MU a pour enveloppe le point I. Donc *la perpendiculaire* Iz *à* MU *au point* I, *passe par le point* ξ.

En résumé, nous avons le résultat suivant : Les trois droites μO_f, $\mu' O_m$ et Iz concourent en un même point.

Supposons alors que l'on connaisse les points O_f, O_m et μ'.

La propriété précédente permet en général de construire le point μ. Il suffit de joindre $\mu' O_m$, de prendre le point de rencontre de cette droite et de Iz, soit P ce point; on joint PO_f et l'on prend le point de rencontre de cette droite et de IM. C'est le point μ (construction de Savary((*fig.* 37).

Fig. 37.



Cette construction tombe en défaut :

1° Quand $\mu' O_m$ et Iz sont confondues, ce qui se produit seulement si μ' est en I;

2° Quand P et O_f sont confondus; ceci ne peut se produire que si μ' est sur Ix, O_m et O_f étant confondus en un point différent de I, ou encore si O_f et O_m sont confondus en I, μ' étant quelconque;

3° Quand PO_f et IM sont confondues; ce qui se produit seulement lorsque μ' est sur Iy.

Dans le cas où la construction est applicable, elle permet d'obtenir la grandeur du rayon de courbure de (C).

Prenons sur Ix un sens positif et sur Iy le sens qu'on obtient en faisant tourner Ix de $+\frac{\pi}{2}$. Posons

$$\overline{IO_f} = R_f \qquad \overline{IO_m} = R_m$$

Prenons ensuite sur IM un sens arbitraire, et soit θ l'angle (à $2k\pi$ près) dont il faut faire tourner $\mathrm{I}x$ pour l'amener sur cet axe dirigé $\mathrm{I}u$. Posons

$$\overline{\mathrm{I}\mu} = \rho, \qquad \overline{\mathrm{I}\mu'} = r.$$

$\mathrm{I}z$ sera l'axe qu'on obtient en faisant tourner $\mathrm{I}u$ de $+\frac{\pi}{2}$.

Exprimons que les droites $\mu\mathrm{O}_f$ et $\mu'\mathrm{O}_m$ se coupent sur $\mathrm{I}z$. Écrivons leur équation dans le système d'axes $\mathrm{I}uz$.

$\mu\mathrm{O}_f$ a pour équation

$$\frac{u}{\rho} + \frac{z}{\lambda} = 1$$

avec la condition

$$\frac{\mathrm{R}_f \sin\theta}{\rho} + \frac{\mathrm{R}_f \cos\theta}{\lambda} = 1,$$

qui exprime que $\mu\mathrm{O}_f$ passe par O_f. On en tire

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mathrm{R}_f \cos\theta} - \frac{\tang\theta}{\rho}.$$

De même $\mu'\mathrm{O}_m$ a pour équation

$$\frac{u}{r} + \frac{z}{\lambda'} = 1$$

avec la même condition analogue

$$\frac{\mathrm{R}_m \sin\theta}{r} + \frac{\mathrm{R}_m \cos\theta}{\lambda'} = 1.$$

D'où l'on tire

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\mathrm{R}_m \cos\theta} - \frac{\tang\theta}{r}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $\mu\mathrm{O}_f$ et $\mu'\mathrm{O}_m$ se coupent sur $\mathrm{I}z$ est $\lambda = \lambda'$, ou

$$\frac{1}{\mathrm{R}_f \cos\theta} - \frac{\tang\theta}{\rho} = \frac{1}{\mathrm{R}_m \cos\theta} - \frac{\tang\theta}{r},$$

ou

$$\tang\theta\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_f} - \frac{1}{\mathrm{R}_m}\right),$$

ou, en multipliant par $\cos\theta$, supposé non nul,

$$\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m},$$

ou

$$\boxed{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}\right)\frac{1}{\sin\theta}.}$$

C'est la formule d'Euler-Savary. Elle est établie lorsque $r \neq 0$ (*voir* 1° précédent), $R_f \neq R_m$ (*voir* 2°), $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ (*voir* 3°).

Cette formule permet de retrouver le lieu des points qui, à l'instant t, sont points d'inflexion sur leur trajectoire. Il suffit d'écrire que, pour ces points, le centre de courbure de la trajectoire est rejeté à l'infini, ou que $\frac{1}{\rho} = 0$. On a la condition

$$\frac{1}{r} = -\left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}\right)\frac{1}{\sin\theta},$$

ce qui exprime que le point M (confondu ici avec le point μ') décrit un cercle tangent en I à Ix et rencontrant Iy au point J d'ordonnée $-\dfrac{1}{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}}$.

Nous retrouvons ainsi le cercle des inflexions, et nous voyons de plus, d'après l'équation de ce cercle, qu'on a

$$\boxed{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} = \frac{\omega}{V},}$$

ce qui nous donne la signification géométrique de la quantité $\frac{\omega}{v}$, que nous savions déjà être indépendante de la loi du mouvement dans le temps. *Cette formule donne ω lorsque l'on connaît la vitesse* V *de* I *sur* I_f.

Cas d'exception. — La formule d'Euler-Savary a été établie en supposant : 1° $r \neq 0$; 2° $R_f \neq R_m$; 3° $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. Qu'ar-

rive-t-il dans chacun de ces cas ? On va l'examiner en passant à la limite.

1° Si r *tend vers zéro*, θ étant $\neq$ de o ou π, le deuxième membre reste fini, le premier ne peut rester fini que si ρ tend aussi vers zéro. Donc, *si au cours du mouvement le centre de courbure* μ' *du profil* (c) *vient en* I, *le centre de courbure* μ *du profil conjugué* (C) *vient à cet instant coïncider avec* μ' *en* I et réciproquement. Ceci est vrai lorsque $\theta \neq 0$ ou π et reste vrai même pour $\theta = 0$ ou π par passage à la limite en faisant tendre θ vers zéro ou π.

2° Si à un instant donné R_f devient égal à R_m, la formule

$$\frac{\omega}{V} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}$$

montre qu'alors ω s'annule, donc la vitesse de tout point M lié au plan mobile s'annule à cet instant comme étant égale à $\omega . IM$, par suite les trajectoires de tous les points du plan mobile présentent à cet instant un *point de rebroussement* $\left(\frac{ds}{dt} = 0 \text{ nécessite } X' = Y' = 0\right)$. On peut démontrer que ce rebroussement est de première espèce, si M n'est pas sur la tangente commune Ix à I_f et I_m, et qu'il est de deuxième espèce si M est sur Ix. La formule d'Euler-Savary est encore valable par passage à la limite et montre que, si $\sin\theta \neq 0$, on a $\rho = r$, c'est-à-dire μ et μ' coïncident, (c) et (C) sont *osculatrices*.

3° La formule d'Euler-Savary, lorsqu'on y fait tendre θ vers $\frac{\pi}{2}$, donne à la limite

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}$$

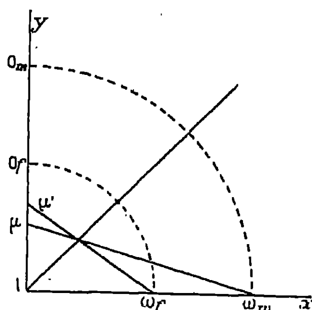
et fournit encore le centre de courbure μ de (C), malgré qu'on soit dans le troisième cas où la construction soit en défaut.

Pour construire géométriquement le point μ, connaissant μ', O et O, on peut alors employer l'artifice suivant (*fig.* 38)

Soient ω_f et ω_m les points sur Ix d'abscisse

$$\overline{I\omega_f} = R_f, \qquad \overline{I\omega_m} = R_m.$$

Fig. 38.



Joignons $\mu'\omega_f$ et $\mu\omega_m$. L'équation de $\mu'\omega_f$ est

$$\frac{x}{R_f} + \frac{y}{r} = 1,$$

et celle de $\mu\omega_m$,

$$\frac{x}{R_m} + \frac{y}{\rho} = 1.$$

La droite joignant I au point d'intersection de ces deux droites a pour équation

$$x\left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}\right) = y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)$$

ou, d'après la formule d'Euler-Savary, en supposant $R_f \neq R_m$,

$$x = y.$$

C'est la première bissectrice de l'angle Ixy. Ceci permet donc de construire le point μ, connaissant μ', ω_f et ω_m.

Courbure des roulettes. — La formule d'Euler-Savary donne le centre de courbure μ de la roulette décrite par un point M du plan mobile; il n'y a qu'à supposer dans l'étude

précédente que μ' coïncide avec M. Si l'on pose

$$\overline{IM} = r, \qquad \overline{I\mu} = \rho,$$

on aura encore

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}\right)\frac{1}{\sin\theta}.$$

En vertu de la remarque faite ci-dessus pour le premier cas d'exception, on voit que, si M vient en I pour une valeur t_0 de t, μ vient aussi en I, c'est-à-dire que la roulette présente un rebroussement, le rayon de courbure μM étant alors nul. Ce fait se produit pour tout point M du plan mobile *situé sur* I_m : sa trajectoire présentera *un rebroussement de première espèce à l'instant* t_0 *où* M *sera le point de contact* I *de* I_m et I_f; la vitesse de M à cet instant t_0 est nulle, mais un calcul direct et très simple de l'accélération de ce point à l'instant t_0 à l'aide des formules (5) qui donnent les composantes sur Oxy de l'accélération d'entraînement de M (*voir* plus haut l'étude des accélérations) montre qu'à cet instant l'accélération non nulle est dirigée suivant Iy, et sa valeur algébrique est $-V\omega$.

Remarquons enfin que la formule trouvée pour la courbure de (C), profil conjugué de (c), ne dépendant à l'instant t considéré que du point μ' centre de courbure de (c) correspondant au point de contact M, on a le théorème :

Le centre de courbure μ *à l'instant* t *de l'enveloppe* (C) *de la courbe* (c) *liée au plan mobile coïncide avec le centre de courbure de la roulette décrite par le centre de courbure* μ' *de* (c) *qui correspond au point* M *de contact de* (C) *et* (c) *à l'instant* t.

Remarques sur la construction de Savary. — La construction de Savary est, au fond, la construction de deux longueurs satisfaisant à la relation

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \text{const.}$$

Si l'on se donne r, ρ est défini d'une façon unique par cette relation.

Si donc on porte sur Iy deux longueurs

$$\overline{IO'_f} = R'_f, \qquad \overline{IO'_m} = R'_m,$$

telles que

$$\frac{1}{R'_f} - \frac{1}{R'_m} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m},$$

il est bien évident que la construction de Savary, faite avec les points O'_f et O'_m, donnera les mêmes résultats que la construction faite sur les points O_f et O_m.

Fig. 39.

On peut profiter de cette indétermination des points O'_f et O'_m pour simplifier la construction. En particulier, on peut envoyer un de ces points à l'infini. Supposons d'abord qu'on envoie O'_f à l'infini; on a donc

$$\frac{1}{R'_f} = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{R'_m} = -\left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}\right) = -\frac{\omega}{V},$$

$$R'_m = -\frac{V}{\omega}.$$

Le point O'_m est donc au point J, diamétralement opposé de I sur le cercle des inflexions. On a alors la construction de la figure 39.

Si, au contraire, on envoie O'_m à l'infini, on a

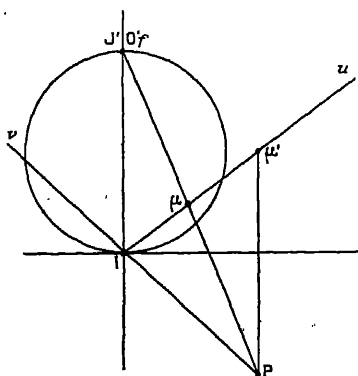
$$\frac{1}{R'_m} = 0$$

et

$$\frac{1}{R'_f} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} = \frac{\omega}{V}, \qquad R'_f = \frac{V}{\omega};$$

le point O'_f est en J', symétrique de J par rapport à I. On a alors la construction de la figure 40.

Fig. 40.



Remarquons encore que, sur la droite Iu, les abscisses ρ et r de μ et μ' sont liées par une relation homographique. Donc si μ et μ' varient sur Iu, ils décrivent deux divisions homographiques; les points doubles sont confondus au point I.

Si le point μ est à l'infini, le point μ' est en A, où le cercle des inflexions recoupe Iu, et l'on a

$$-\frac{1}{\overline{IA}} = \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}\right)\frac{1}{\sin\theta}.$$

D'où

$$\frac{1}{\overline{I\mu}} - \frac{1}{\overline{I\mu'}} = -\frac{1}{\overline{IA}},$$

ou

$$(\overline{I\mu'} - \overline{I\mu})\overline{IA} = -\overline{I\mu}.\overline{I\mu'},$$

ou

$$\overline{\mu\mu'}(\overline{I\mu'} + \overline{\mu' A}) = -\overline{I\mu}.\overline{I\mu'},$$

$$\overline{\mu\mu'}.\overline{\mu' A} = -\overline{I\mu'}(\overline{I\mu} + \overline{\mu\mu'}) = -\overline{I\mu'}^2,$$

ou enfin

$$\overline{\mu'\mu}.\overline{\mu' A} = \overline{I\mu'}^2,$$

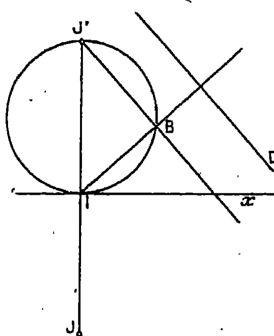
ce qui montre que les points μ et A sont du même côté par rapport à μ'. En particulier, si la courbe (c) se réduit au point M, μ' est confondu avec M et l'on voit que *la concavité de la trajectoire de* M *est toujours dirigée du côté de* A.

Appliquons encore la formule d'Euler-Savary à la recherche du centre de courbure de (C) lorsque le point M est point d'inflexion sur (c). Alors μ' est à l'infini, $\frac{1}{r} = 0$; donc

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}\right)\frac{1}{\sin\theta}, \qquad \rho = \frac{V}{\omega}\sin\theta;$$

le point μ se trouve en B sur le *cercle de diamètre* OJ'.

Fig. 41.



En particulier, si la courbe (c) devient une *droite* D, on voit que le point B, centre de courbure de l'enveloppe de D, ne dépend pas de la distance de la droite D au point I, mais seulement de la direction de la droite D. Cela s'explique par

ce fait que deux droites parallèles du plan mobile ont pour enveloppe des courbes parallèles.

En particulier, si l'on considère la parallèle à D menée par B, c'est-à-dire la droite J′B (*fig.* 41), on voit que, pour l'enveloppe (C) de cette droite, le rayon de courbure est nul au point B; donc, en général, B est un point de rebroussement sur (C). C'est pourquoi on donne au cercle de diamètre OJ′ le nom de *cercle des rebroussements*.

Remarques sur le mouvement inverse. — Si l'on considère le mouvement inverse $\left(\frac{\Pi_0}{\Pi}\right)$, on sait que le c. i. r. ne change pas; la courbe I_f roule sur I_m; on peut dire qu'en passant de $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$ à $\left(\frac{\Pi_0}{\Pi}\right)$, *base et roulante s'échangent.*

Dans la formule d'Euler-Savary, il faut donc intervertir les quantités R_m et R_f. Ceci montre que, dans le nouveau mouvement, le cercle de diamètre OJ′ est le cercle des inflexions et le cercle de diamètre OJ, le cercle des rebroussements.

D'autre part, la courbe (C) a alors comme enveloppe (c) et la construction de Savary montre alors que le centre de courbure de l'enveloppe de (C) n'est autre que le point μ'. Il y a échange des points μ et μ' dans le passage du mouvement $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$ à $\left(\frac{\Pi_0}{\Pi}\right)$.

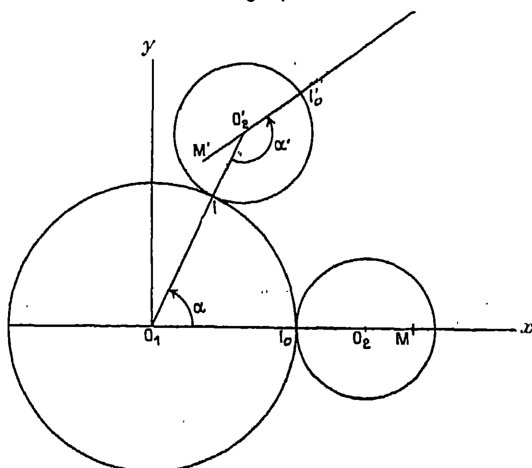
C. **Étude du mouvement épicycloïdal.** — Le mouvement d'un plan glissant sur lui-même est dit épicycloïdal lorsque la base et la roulante sont des cercles. Une roulette est dite *allongée* si le point du plan mobile qui la décrit est extérieur à la roulante; elle est *raccourcie* si ce point est intérieur à la roulante; on la nomme parfois *cuspidale* lorsque le point est situé sur la roulante elle-même.

Lorsque la base et la roulante sont tangentes extérieurement, les roulettes sont appelées *épicycloïdes;* lorsqu'elles sont tangentes intérieurement, le rayon de la base étant supé-

rieur à celui de la roulante, les roulettes sont appelées *hypocycloïdes;* nous verrons qu'elles sont identiques aux épicycloïdes. Enfin, dans le cas limite où la base est une droite, les roulettes sont appelées *cycloïdes*.

Cherchons les équations de ces courbes. Pour cela, prenons comme axe des x la position de la ligne des centres pour laquelle le point mobile M se trouve sur cette droite. Prenons comme origine le centre O_1 de la base, comme axe $O_1 y$ l'axe qu'on obtient en faisant tourner $O_1 x$ de $+\frac{\pi}{2}$ (*fig.* 42).

Fig. 42.



Soit R_1 le rayon de la base. Soient O_2 la position initiale du centre de la roulante ; I_0 le c. i. r. à l'instant initial. Posons

$$\overline{I_0 O_2} = R_2.$$

Soient O'_2 la position du centre de la roulante à l'instant t, I le c. i. r. à cet instant, I'_0 la position à l'instant t du point de la roulante confondu avec le point I_0 à l'instant initial. Soit

$$\alpha = (\widehat{O_1 x, O_1 O'_2}).$$

Soit M la position initiale sur $O_1 O_2$ du point mobile

$$\overline{O_2 M} = a.$$

Soit M′ sa position à l'instant t. M′ est sur $O'_2 I'_0$.

Pour trouver les coordonnées de M′, projetons l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{O_1 M'} = \overrightarrow{O_1 O'_2} + \overrightarrow{O'_2 M'}.$$

Il faut avoir l'angle $(\widehat{O_1 x,\ I'_0 O'_2})$; on a

$$\begin{aligned}(\widehat{O_1 x,\ I'_0 O'_2}) &= (\widehat{O_1 x,\ O_1 O'_2}) + (\widehat{O_1 O'_2,\ I'_0 O'_2}) \\ &= \alpha + (\widehat{O'_2 I,\ O'_2 I'_0}).\end{aligned}$$

Posons

$$(\widehat{O'_2 I,\ O'_2 I'_0}) = \alpha'.$$

Afin que les tangentes positives en I à la base et à la roulante soient identiques, nous prenons, pour compter les *arcs*, le sens trigonométrique sur la base; sur la roulante, prenons le sens trigonométrique si R_2 est négatif, le sens contraire si R_2 est positif. Alors on doit avoir dans tous les cas

$$\widehat{I_0 I} = \widehat{I'_0 I}$$

ou

$$R_1 \alpha = R_2 \alpha', \qquad \text{d'où} \qquad \alpha' = \frac{R_1}{R_2}\alpha$$

et

$$(\widehat{O_1 x,\ I'_0 O'_2}) = \alpha + \alpha'.$$

On a donc, pour les coordonnées de M′,

$$\begin{aligned} x &= (R_1 + R_2)\cos\alpha + a\cos(\alpha + \alpha'), \\ y &= (R_1 + R_2)\sin\alpha + a\sin(\alpha + \alpha'), \end{aligned}$$

ou, en remplaçant α' par sa valeur,

$$\begin{aligned} x &= (R_1 + R_2)\cos\alpha + a\cos\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)\alpha, \\ y &= (R_1 + R_2)\sin\alpha + a\sin\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)\alpha. \end{aligned}$$

Il est évident qu'à partir du moment où le point I'_0 revient sur la base au point I_1, il suffit d'imprimer à l'arc de courbe obtenu des rotations de

$$\widehat{I_0 O_1 I_1} = \alpha_1, \ 2\alpha_1, \ 3\alpha_1, \ \ldots$$

pour avoir la courbe tout entière. La courbe se fermera donc si α_1 est commensurable avec π. Or, l'arc du cercle de base $\widehat{I_0 I_1}$ est égal à $|2\pi R_2|$; donc

$$\alpha_1 = 2\pi \frac{|R_2|}{R_1}.$$

Donc, si R_1 et R_2 sont commensurables, la courbe est fermée. Dans ce cas, elle est unicursale. En effet, si

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{p}{q},$$

p et q étant entiers, il suffit de prendre comme paramètre

$$t = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2q}$$

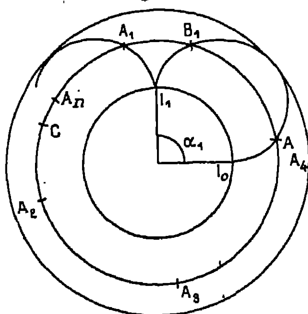
pour avoir x et y sous forme d'expressions rationnelles en t.

Si R_1 et R_2 sont incommensurables, la courbe ne se ferme jamais. Mais, dans ce cas, on peut montrer que la courbe passe à une distance aussi petite que l'on veut d'un point arbitraire situé à l'intérieur de la couronne circulaire formée par les cercles de centres O_1 et de rayons $R_1 + R_2 - a$ et $R_1 + R_2 + a$. Il suffit de le prouver lorsque $a = R_2$, c'est-à-dire pour l'épicycloïde cuspidale.

A cet effet, considérons un cercle de rayon r, compris entre R_1 et $R_1 + 2R_2$. Soient A et B les points où ce cercle rencontre un arceau de l'épicycloïde (*fig.* 43). Tous les points où la courbe rencontre le cercle se déduisent de A ou de B par des rotations de $k\alpha_1$, k étant un entier quelconque positif ou négatif; nous n'aurons besoin que d'une seule de ces séries de

points, obtenue par exemple, en supposant $k > 0$ et en partant du point A. Soient $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ les points de cette

Fig. 43.



série. Soit C un point ne faisant pas partie de cette série. Nous allons montrer qu'on peut trouver des points A_n aussi voisins de C que l'on veut.

D'une façon plus précise, si β est l'angle $\widehat{AOC}$, ε étant un nombre aussi petit qu'on veut, montrons qu'on peut trouver deux nombres entiers p et q tels que

$$|p\alpha_1 - (2q\pi + \beta)| < \varepsilon$$

ou, en divisant par 2π,

$$\left| p\frac{\alpha_1}{2\pi} - q - \frac{\beta}{2\pi} \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi} = \eta;$$

posons

$$\frac{\alpha_1}{2\pi} = \theta, \qquad \frac{\beta}{2\pi} = \omega.$$

θ est un nombre incommensurable par hypothèse; quant à ω, c'est un nombre quelconque, inférieur à 1 et qu'on peut supposer positif.

Montrons qu'il suffit de trouver deux nombres entiers m et n tels que

$$|m\theta - n| < \eta.$$

En effet, supposons d'abord qu'on ait $m\theta - n > 0$. Alors

on a

$$m\theta - n < \eta;$$

posons

$$h = m\theta - n,$$

et soit kh le plus grand multiple de h contenu dans ω :

$$kh \leqq \omega < (k+1)h;$$

on a donc

$$k(m\theta - n) \leqq \omega < (k+1)(m\theta - n)$$

ou

$$|k(m\theta - n) - \omega| < |m\theta - n| < \eta;$$

donc, en prenant $p = km$, $q = kn$, le problème sera résolu. Si l'on avait $m\theta - n < 0$, il suffirait de remplacer β par $\beta - 2\pi$, qui est aussi une quantité négative; le raisonnement s'achève sans difficulté.

Nous sommes donc ramenés au problème suivant : montrer qu'il existe deux nombres entiers m et n tels que

$$|m\theta - n| < \eta,$$

η étant une quantité donnée à l'avance et aussi petite qu'on le veut.

On peut toujours trouver un nombre entier r tel que

$$\frac{1}{r} \leqq \eta < \frac{1}{r-1}.$$

Pour démontrer la proposition annoncée, il suffit de montrer qu'on peut trouver m et n entiers tels que

$$|m\theta - n| < \frac{1}{r}.$$

Considérons les nombres

$$\theta, \quad 2\theta, \quad 3\theta, \quad \ldots, \quad r\theta$$

et retranchons de chacun de ces nombres sa partie entière. On obtient comme restes r nombres compris entre 0 et 1 :

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots, \quad \theta_r.$$

Ces nombres sont irrationnels, puisqu'il en est ainsi de θ. Ils sont tous inégaux, car si l'on avait

$$\theta_i = \theta_j,$$

on en déduirait

$$i\theta = j\theta + k,$$

k étant un nombre entier; d'où

$$\theta = \frac{k}{i-j};$$

θ serait donc rationnel, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Divisons alors l'intervalle o ... 1 en r intervalles égaux par les points de division

$$\frac{1}{r}, \quad \frac{2}{r}, \quad \dots, \quad \frac{r-1}{r}.$$

Chaque nombre θ_i se trouve dans un de ces intervalles, sans pouvoir coïncider avec une extrémité.

Comme il y a r nombres θ_i et r intervalles, de deux choses l'une :

1° Ou bien dans chaque intervalle il y a un θ_i, et par suite, un seul.

En particulier, il y en a un dans l'intervalle $0 \dots \frac{1}{r}$; soit θ_j ce nombre; on a donc

$$\theta_j < \frac{1}{r}$$

ou, j_1 étant la partie entière de $j\theta$,

$$|j\theta - j_1| < \frac{1}{r}.$$

Il suffit donc, dans ce cas, de prendre $m = j$, $n = j_1$ pour résoudre le problème proposé.

2° Ou bien il existe des intervalles dans lesquels il n'y a aucun θ_i. Dans ce cas, il existe certainement un intervalle où

se trouvent deux nombres, θ_i et θ_j. On a donc

$$|\theta_i - \theta_j| < \frac{1}{r},$$

ou, si i_1 et j_1 sont les parties entières de $i\theta$ et $j\theta$,

$$|i\theta - i_1 - (j\theta - j_1)| < \frac{1}{r},$$

ou

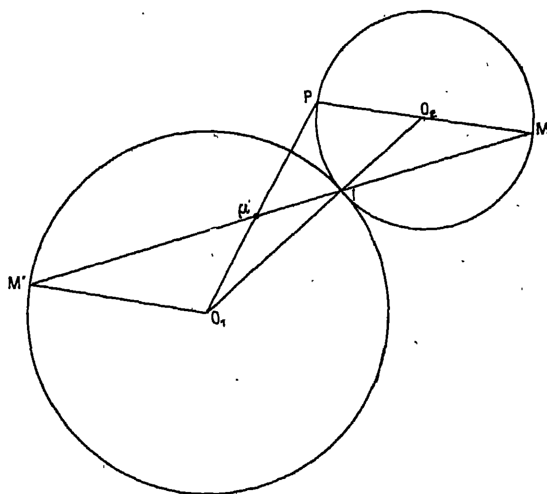
$$|(i-j)\theta - (i_1 - j_1)| < \frac{1}{r}.$$

Il suffit donc de prendre dans ce cas $m = i - j$, $n = i_1 - j_1$ pour satisfaire aux conditions de l'énoncé.

On voit donc que, dans tous les cas, le théorème est démontré. On voit même que le nombre m est toujours inférieur à r.

Courbure d'une épicycloïde. — Nous étudierons seulement le cas de l'épicycloïde cuspidale.

Fig. 44.



Soient donc (*fig.* 44) M la position du point mobile à l'instant t, I le centre instantané de rotation à cet instant.

Pour trouver le centre de courbure de l'épicycloïde au point M, appliquons la construction de Savary.

Le centre de courbure O_f de la base est le centre du cercle O_1. De même le centre de courbure O_m de la roulante est le centre O_2 de ce cercle roulant.

Le point P est donc à l'intersection de MO_2 et de la perpendiculaire à IM menée par I. Donc, P est le point diamétralement opposé à M sur la roulante. Le point μ, centre de courbure cherché, est alors à l'intersection de IM et de O_1P.

Soit M' le point où la droite IM rencontre de nouveau la base. Comme I est un centre d'homothétie pour la base et la roulante, O_2M et O_1M' sont parallèles, et l'on a en grandeur et en signe

$$\frac{\overline{O_1M'}}{\overline{O_2M}} = \frac{\overline{IO_1}}{\overline{IO_2}} = -\frac{R_1}{R_2}.$$

Comme $\overline{PM} = 2\,\overline{O_2M}$, on a donc aussi

$$\frac{\overline{\mu O_1}}{\overline{\mu P}} = \frac{\overline{O_1M'}}{\overline{PM}} = \frac{1}{2}\frac{\overline{O_1M'}}{\overline{O_2M}} = -\frac{R_1}{2R_2},$$

d'où

$$\frac{\overline{O_1\mu}}{\overline{\mu P}} = \frac{R_1}{2R_2}, \qquad \frac{\overline{O_1\mu}}{\overline{O_1\mu}+\overline{\mu P}} = \frac{\overline{O_1\mu}}{\overline{O_1P}} = \frac{R_1}{R_1+2R_2};$$

donc le lieu de μ est homothétique du lieu de P par rapport au point O_1, dans le rapport $\frac{R_1}{R_1+2R_2}$.

Or, on a sur la roulante

$$\text{arc}\,\widehat{MP} = \pi R_2.$$

Donc, si I_0 est le point de l'épicycloïde qui se trouve sur la base, le lieu de P est une épicycloïde qu'on obtient en faisant tourner l'épicycloïde donnée autour de O_1 d'un angle

$$\frac{\pi R_2}{R_1} = \frac{\alpha_1}{2}.$$

Le lieu de μ est donc l'épicycloïde qu'on en déduit par l'homothétie de pôle O_1 et de rapport $\frac{R_1}{R_1+2R_2}\cdot$ On voit que cette courbe est tangente à la base au point I_0 et aux points qu'on en déduit par des rotations de $k\alpha_1$, c'est-à-dire en tous les points de rebroussement de l'épicycloïde.

Inflexions des roulettes. — La base étant orientée dans le sens trigonométrique, prenons en I comme axe Ix la demi-tangente positive à la base. Iy s'en déduira par une rotation de $+\frac{\Pi}{2}\cdot$

On a alors, dans la formule d'Euler-Savary,

$$R_f = +R_1, \qquad R_m = -R_2.$$

Donc

$$\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}.$$

Donc, si J est le point diamétralement opposé à I dans le cercle des inflexions, on a, sur Iy,

$$\overline{IJ} = -\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}.$$

Si $R_2 > 0$, c'est-à-dire si la courbe est une épicycloïde proprement dite, $\overline{IJ}$ est du signe de $-R_2$, donc de $\overline{IO_2}$. De plus

$$|\overline{IJ}| = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} < R_2;$$

donc le cercle des inflexions est *intérieur à la roulante.* Tout point du plan mobile à une distance de O_2 comprise entre

$$|\overline{O_m J}| = R_2 - \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} = \frac{R_2^2}{R_1+R_2}$$

et R_2, décrit une trajectoire présentant des points d'inflexion; tous les autres points décrivent des trajectoires sans points d'inflexion.

Si $R_2 < 0$ et $0 > R_2 > -R_1$, la courbe est une hypocycloïde, $\overline{IJ}$ est encore du signe de $-R_2$, c'est-à-dire de $\overline{IO_2}$. De plus,

$$|\overline{IJ}| = \frac{R_1 |R_2|}{R_1 - |R_2|} > |R_2|.$$

Donc le cercle des inflexions contient O_2 à son intérieur. Si $|R_2| < \frac{R_1}{2}$, le cercle des inflexions est intérieur à la roulante. La plus courte distance de O_2 au cercle des inflexions est

$$d = \frac{R_1 |R_2|}{R_1 - |R_2|} - |R_2| = \frac{R_2^2}{R_1 - |R_2|}.$$

Tout point à une distance de O_2 inférieure à d décrit une trajectoire sans point d'inflexion; il en est de même de tout point extérieur à la roulante. Les autres points décrivent des trajectoires présentant des points d'inflexion.

Si $|R_2| > \frac{R_1}{2}$, le cercle des inflexions est extérieur à la roulante. Tout point intérieur à la roulante décrit une trajectoire sans point d'inflexion; il en est de même de tout point à une distance de O_2 supérieure à $d = \frac{R_2^2}{R_1 - |R_2|}$.

Enfin, si $R_2 < 0$ et $R_2 < -R_1$, la courbe est une péricycloïde. $\overline{IJ}$ est du signe de R_2, donc du signe contraire à $\overline{IO_2}$. Donc le cercle des inflexions est extérieur à la roulante. Tout point intérieur à la roulante décrit donc une trajectoire sans point d'inflexion. Il en est de même de tout point situé à une distance de O_2 supérieure à

$$d = \frac{R_1 |R_2|}{|R_2| - R_1} + |R_2| = \frac{R_2^2}{|R_2| - R_1}.$$

Tout autre point décrit une trajectoire présentant des points d'inflexion.

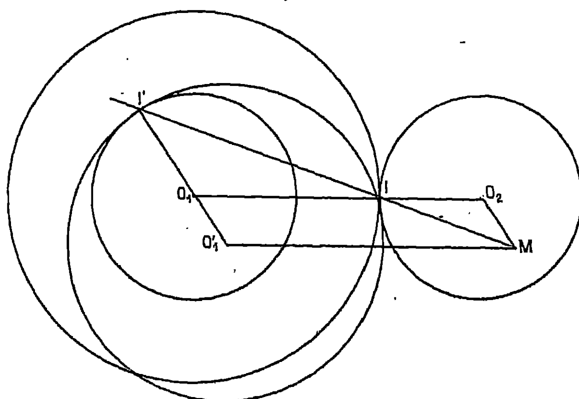
Double génération des épicycloïdes (*Cremona*). — Soit M un point du plan mobile (*fig.* 45). Complétons le parallé-

logramme dont trois sommets sont O_1, O_2, M. Soit O'_1 le quatrième sommet. On a

$$\overline{O'_1 M} = \overline{O_1 O_2} = R_1 + R_2.$$

La longueur $O'_1 M$ est donc constante.

Fig. 45.



On peut supposer qu'un plan mobile Π' soit attaché à ce segment, lorsque le temps varie. Cherchons la base et la roulante dans le mouvement de ce plan Π' sur le plan fixe Π_0.

Le c. i. r. est à l'intersection des normales aux trajectoires de M et O'_1.

Or, la trajectoire de O'_1 est le cercle de centre O_1 et de rayon

$$\overline{O_1 O'_1} = \overline{O_2 M} = a.$$

Donc la normale en O'_1 à cette trajectoire est la droite $O_1 O'_1$. La trajectoire de M est une épicycloïde qui a pour normale en M la droite IM. Donc le c. i. r. du mouvement de Π' sur Π_0 est le point I', intersection de $O_1 O'_1$ et de IM.

Or, on a

$$\frac{\overline{O_1 I'}}{\overline{O_2 M}} = \frac{\overline{IO_1}}{\overline{IO_2}} = -\frac{R_1}{R_2},$$

puisque les droites $O_1 O'_1$ et $O_2 M$ sont parallèles.

Donc

$$\overline{O_1 I'} = -\frac{R_1}{R_2}\overline{O_2 M} = -\frac{R_1}{R_2}a,$$

le point I′ décrit donc dans le plan Π_0 un cercle de centre O_1 et de rayon $R'_1 = \left|\frac{R_1}{R_2}a\right|$.

Mais, d'autre part,

$$\overline{I'O'_1} = \overline{I'O_1} + \overline{O_1 O'_1} = a + \frac{R_1}{R_2}a = a\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right).$$

Donc, dans le plan Π′, I′ décrit un cercle de centre O'_1 et de rayon

$$|R'_2| = \left|a\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\right|.$$

Le mouvement est donc épicycloïdal. Les positions relatives de la base et de la roulante s'étudieront en comparant les quantités $\overline{O_1 I'}$ et $\overline{I'O'_1}$ en grandeur et en signe (on peut toujours supposer a positif).

On verra aisément que :

1° Si, dans le premier mode de génération, la courbe décrite par M est une épicycloïde, dans le deuxième mode de génération, cette courbe est définie comme une péricycloïde, allongée si l'épicycloïde est raccourcie, raccourcie dans le cas contraire, cuspidale si l'épicycloïde est elle-même cuspidale;

2° Réciproquement, si dans le premier mode de génération la courbe décrite par M est une péricycloïde, dans le deuxième mode de génération, cette courbe sera définie comme épicycloïde, les formes de ces deux courbes s'associant comme ci-dessus;

3° Si, dans le premier mode de génération, la courbe décrite par M est une hypocycloïde, cette courbe sera encore définie comme hypocycloïde dans le deuxième mode de génération; si la première hypocycloïde est allongée, la deuxième

sera raccourcie, et inversement; enfin, si l'on a

$$\frac{R_1}{2} > |R_2|,$$

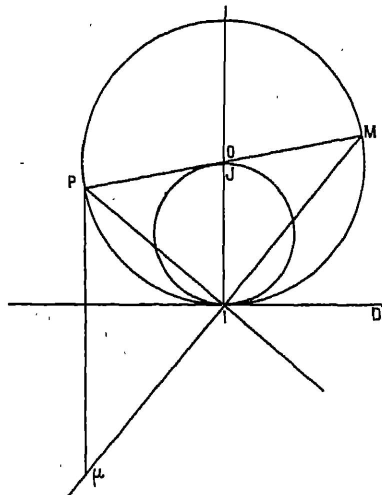
on aura

$$\frac{R'_1}{2} < |R'_2|,$$

et inversement.

Courbure de la cycloïde. — Soit O le centre du cercle roulant sur la droite D (*fig.* 46). Le centre de courbure O_m

Fig. 46.



de la roulante est en O, celui de la base est rejeté à l'infini; autrement dit, si R est le rayon de la roulante et si l'on prend comme axes en I la droite IO comme axe Iy, l'axe Ix se déduisant de Iy par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R}, \qquad \frac{1}{R_f} = 0;$$

donc

$$\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} = -\frac{1}{R};$$

le point J est donc tel que $\overline{IJ} = R$, donc J est en O, le cercle des inflexions est le cercle de diamètre IO. Autrement dit, une cycloïde raccourcie a toujours des points d'inflexion, une cycloïde allongée n'en a jamais.

Construisons le centre de courbure d'une cycloïde cuspidale en un de ses points M. Appliquons la construction de Savary.

La droite MO_m est ici le diamètre MO, qui rencontre la perpendiculaire Iz élevée en I à IM, au point P, diamétralement opposé à M sur la roulante.

Ensuite, comme O_f est à l'infini sur Iy, la droite PO_f est la parallèle à Iy menée par P, qui rencontre IM au point μ, centre de courbure cherché.

On a donc

$$\frac{\overline{\mu P}}{\overline{IO}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OM}} = 2;$$

donc

$$\overline{\mu P} = 2\overline{IO} = 2R.$$

Donc le lieu de μ se déduit du lieu de P par une translation parallèle à Iy et égale à $-2R$.

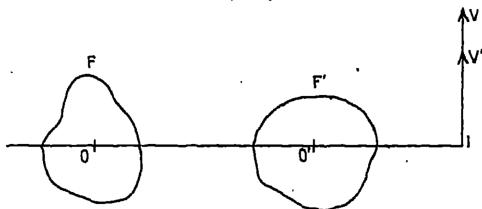
Or, le point P décrit évidemment une cycloïde, déduite du lieu de M par une translation parallèle à Ix et égale à πR. Donc, le lieu de μ est une cycloïde égale à celle que décrit M.

D. **Application de la théorie du mouvement d'un plan sur un plan. Engrenages.** — Considérons (*fig.* 47) deux figures planes F et F′, situées dans un même plan Π_0, et mobiles respectivement autour de deux points fixes O et O′ de ce plan. On peut considérer qu'à chaque figure est attaché un plan mobile; soient Π et Π' ces plans. Le mouvement $\left(\frac{\Pi'}{\Pi_0}\right)$ peut être considéré

comme résultant du mouvement $\left(\frac{\Pi'}{\Pi}\right)$ et du mouvement $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$.

Cherchons le c. i. r. I du mouvement $\left(\frac{\Pi'}{\Pi}\right)$. D'après une propriété antérieurement démontrée, ce point est sur la droite

Fig. 47.



qui joint les c. i. r. des mouvements $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$ et $\left(\frac{\Pi'}{\Pi_0}\right)$. Or, le c. i. r. du mouvement $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$ est le point O; de même le c. i. r. du mouvement $\left(\frac{\Pi'}{\Pi_0}\right)$ est le point O'; donc le point I est sur la droite OO'.

Pour achever de déterminer le point I, nous devons écrire que sa vitesse dans le mouvement de Π', par rapport à Π, est nulle, c'est-à-dire que $\vec{V} - \vec{V'} = 0$, $\vec{V}$ étant la vitesse de I dans le mouvement $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$, $\vec{V'}$ sa vitesse dans le mouvement $\left(\frac{\Pi'}{\Pi_0}\right)$. Prenons un sens positif sur la droite OO', et soient $\rho = \overline{OI}$, $\rho' = \overline{O'I}$.

Supposons de plus le plan orienté, et soient ω et ω' les valeurs algébriques des vecteurs rotations de F et de F' à l'instant t. Les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ sont perpendiculaires à OO', et ont pour valeur algébrique (en prenant comme sens positif sur une perpendiculaire à OO' le sens qu'on déduit du sens positif choisi sur OO' en faisant tourner cet axe de $+\frac{\pi}{2}$)

$$V = \omega\rho, \qquad V' = \omega'\rho'.$$

Donc la condition qui détermine le point I est

$$\omega\rho = \omega'\rho' \qquad \text{ou} \qquad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\omega}{\omega'} \qquad (\text{avec } \rho - \rho' = \overline{OO'} = a).$$

Si $\frac{\omega}{\omega'}$ est constant, ρ et ρ' sont constants, le point I décrit un cercle dans chacun des plans Π et Π'. Le mouvement $\left(\frac{\Pi'}{\Pi}\right)$ est donc un mouvement épicycloïdal.

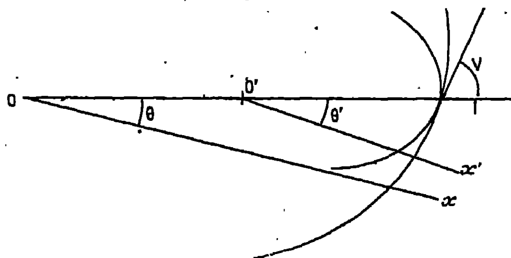
Inversement, si l'on veut lier les deux figures F et F' de manière que leurs vitesses de rotation soient dans un rapport constant $\frac{\omega}{\omega'} = k$, il suffira de faire rouler l'un sur l'autre deux cercles de centres respectifs O et O', et de rayons ρ et ρ' tels que

$$\frac{\rho'}{\rho} = k, \qquad \rho - \rho' = a.$$

Dans le cas où $\frac{\omega}{\omega'}$ varie avec le temps, les courbes (C) et (C') que décrit le point I dans les plans Π et Π' ne sont plus des cercles de centres O et O'. On peut se proposer de rechercher les relations qui lient l'une à l'autre ces deux courbes.

Nous étudierons ces courbes en coordonnées polaires. Prenons dans le plan Π, comme axe polaire l'axe qui à l'instant $t = 0$ se trouve confondu avec OO'. Soient Ox sa posi-

Fig. 48.



tion à l'instant t, θ l'angle $(\widehat{Ox, OO'})$ (*fig.* 48). De même, dans le plan Π' prenons comme axe polaire l'axe qui pour $t = 0$

est confondu avec OO'. Soit $O'x'$ sa position à l'instant t, et θ' l'angle $(\widehat{O'x', OO'})$ (θ et θ' sont comptés dans le sens positif choisi pour les angles dans le plan Π_0). Soit I le c. i. r. de $\left(\frac{\Pi'}{\Pi}\right)$ à l'instant t; I est le point de contact des deux courbes (C) et (C'); on a donc d'abord, si l'on pose

$$\overline{OI} = \rho, \qquad \overline{O'I} = \rho',$$

$$(1) \qquad \rho - \rho' = \overline{OO'} = a.$$

Écrivons ensuite que les courbes sont tangentes au point I, c'est-à-dire que l'angle V de la tangente avec le rayon vecteur est le même pour les deux courbes, ce qui donne

$$(2) \qquad \frac{\rho\, d\theta}{d\rho} = \frac{\rho'\, d\theta'}{d\rho'};$$

or, si l'on différentie la relation (1), on a

$$d\rho' - d\rho = 0, \qquad d\rho' = d\rho.$$

Donc l'équation (2) peut s'écrire

$$(3) \qquad \rho\, d\theta = \rho'\, d\theta'.$$

Les relations (1) et (3) sont suffisantes pour exprimer que les courbes C et C' roulent l'une sur l'autre, car si l'on forme les éléments linéaires ds et ds' de ces deux courbes, on a

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2,$$
$$ds'^2 = d\rho'^2 + \rho'^2\, d\theta'^2,$$

et, d'après (1) et (3), on a donc

$$ds^2 = ds'^2$$

ou

$$ds = \pm\, ds'^2.$$

Pour montrer que les courbes roulent, il suffit de montrer que les variations d'angles $d\theta$ et $d\theta'$ sont de même signe si ρ et ρ' ont même signe, et de signes contraires si ρ et ρ' sont de signes contraires. Or, c'est évident d'après (3).

On peut se poser, au sujet des courbes (C) et (C′), divers problèmes; par exemple, si l'on se donne la courbe (C), on peut chercher à déterminer (C′). Soit $\rho = f(\theta)$ l'équation de (C); on a

$$\rho' = \rho - a = -a + f(\theta)$$

et la relation (3) s'écrit

$$\rho\, d\theta = (\rho - a)\, d\theta'$$

ou

$$d\theta' = \frac{f(\theta)}{-a + f(\theta)}\, d\theta.$$

On a donc θ' en fonction de θ par une quadrature

$$\theta' = \int_0^\theta \frac{f(\theta)\, d\theta}{-a + f(\theta)},$$

car pour $\theta = 0$ on a

$$\theta' = 0;$$

donc ρ' et θ' sont exprimés en fonction du paramètre θ, ce qui donne la courbe (C′).

On peut aussi chercher (C) et (C′) de façon qu'il y ait une relation donnée entre θ et θ', soit $\theta' = f(\theta)$.

On a alors

$$\rho\, d\theta = \rho'\, d\theta' = (\rho - a)\, d\theta',$$

et comme $d\theta' = f'(\theta)\, d\theta$,

$$\rho\, d\theta = (\rho - a) f'(\theta)\, d\theta,$$

ou

$$\rho[1 - f'(\theta)] = -a f'(\theta),$$

$$\rho = \frac{a f'(\theta)}{-1 + f'(\theta)};$$

on a donc la courbe (C) sans quadrature, et la courbe (C′) s'en déduit de suite par les relations

$$\rho' = \rho - a, \qquad \theta' = f(\theta).$$

Dans la pratique, lorsqu'on veut imprimer aux deux figures

F et F′ deux mouvements liés par une certaine relation, on cherche les courbes (C) et (C′) correspondantes; on les réalise matériellement et on les assujettit à rouler l'une sur l'autre en introduisant un frottement suffisant à leur point de contact (généralement on arme les deux courbes de dents pouvant s'emboîter les unes dans les autres; on a ainsi constitué des engrenages).

Exemples. — 1° Si (C) est une spirale logarithmique de pôle O coupant les rayons sous l'angle constant V, (C′) sera une spirale logarithmique égale de pôle O′.

2° Si (C) et (C′) sont deux courbes roulantes correspondant aux équations

$$\rho = f(\theta) \qquad \text{et} \qquad \rho' = g(\theta'),$$

on en déduira en vertu des formules précédentes une infinité de couples de courbes roulantes (C_n) et (C'_n) par les équations

$$\rho = f(n\theta), \qquad \rho' = g(n\theta'),$$

n étant un nombre quelconque.

3° Si (C) est une ellipse de foyer O d'équation $\rho = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, *dont le demi-grand axe est égal à* OO′, (C′) sera une ellipse égale de foyer O′ d'équation $\rho' = \frac{-p}{1-e\cos\theta'}$; à chaque instant (C) et (C′) sont symétriques par rapport à leur tangente commune en I. Cela peut se déduire des formules précédentes, mais directement cela se rattache à l'exemple 3° (contre parallélogramme articulé) que nous avons traité au début du Chapitre V (section A, voir *fig.* 32).



CHAPITRE VI.

ÉTUDE DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE (*suite*).

DEUXIÈME PARTIE.

Mouvement d'un solide ayant un point fixe.

Pendant le mouvement, tout point du corps reste à une distance constante du point fixe O. En particulier, une sphère quelconque de centre O glisse sur elle-même pendant le mouvement. Réciproquement, si une sphère du corps solide glisse sur elle-même, le centre de cette sphère est un point fixe du corps solide. Le mouvement d'un corps solide est donc le mouvement d'une sphère mobile glissant sur une sphère fixe de même centre et de même rayon; c'est une sorte de généralisation du mouvement d'un plan sur un plan. Dans la suite, nous supposerons qu'on a choisi une fois pour toutes le rayon de la sphère considérée.

Comme le point O a toujours une vitesse nulle, le mouvement instantané est toujours une rotation dont l'axe passe par O.

Soit I le point où la direction positive de l'axe (direction du vecteur rotation $\vec{\omega}$) perce la sphère. Le point I et le point I', diamétralement opposés à I, sont les seuls points de la sphère mobile dont la vitesse soit nulle, en supposant $\omega \neq 0$. Le point I est dit *centre instantané de rotation sphérique* (*fig.* 49).

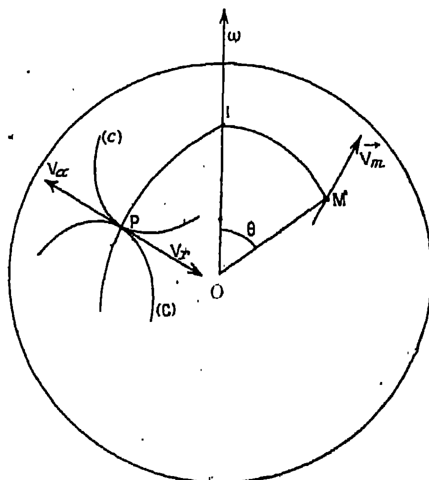
La vitesse $\vec{V}_M$ d'un point M quelconque de la sphère mobile

est perpendiculaire au plan diamétral OIM. Donc *le grand cercle passant par* I *et* M *est normal en* M *à la trajectoire de* M. De plus, si θ est l'angle $\widehat{IOM}$, on a

$$V_M = \omega R \sin\theta,$$

R étant le rayon de la sphère.

Fig. 49.



Considérons de même une courbe (c) sur la sphère mobile. Quand la sphère se déplace, la courbe (c) a une enveloppe (C) située sur la sphère fixe. Soit P le point caractéristique de (c) à l'instant t, c'est-à-dire le point de contact de (c) et (C) à l'instant t_P. Lorsque la sphère mobile se déplace, le point caractéristique P se déplace sur la courbe (c) en général; il se déplace d'autre part sur la courbe (C). Le mouvement de P sur (C) est le mouvement résultant du mouvement de P sur la courbe (c) et du mouvement de la sphère mobile. La vitesse absolue $\vec{V}_a$ du point P est dirigée suivant la tangente PT à (C); sa vitesse relative $\vec{V}_r$ est dirigée suivant la même droite,

puisque (C) et (c) sont tangentes en P. Donc sa vitesse d'entraînement $\vec{V_e}$ est nulle ou dirigée suivant la droite PT. En tout cas, *le grand cercle normal aux courbes* (c) *et* (C) *au point* P *passe par* I.

De plus, si s et S sont les abscisses curvilignes de P sur (c) et (C) — ces deux courbes étant orientées de manière que les demi-tangentes positives en P coïncident — les valeurs algébriques de $\vec{V_a}$ et $\vec{V_r}$ sur la demi-tangente positive en P sont

$$V_a = \frac{dS}{dt}, \qquad V_r = \frac{ds}{dt},$$

d'où

$$V_e = \frac{dS}{dt} - \frac{ds}{dt} = \frac{d(S-s)}{dt} = R \sin\theta . \omega,$$

θ étant l'angle $\widehat{IOP}$. En général, le point P n'est pas en I, donc $\theta \neq 0$, $V_e \neq 0$, $S - 0$ n'est pas constant; les courbes (c) et (C) glissent l'une sur l'autre.

Mais si l'on considère les courbes I_m et I_f, lieux de I sur la sphère mobile et sur la sphère fixe, le raisonnement précédent montre que *ces deux courbes sont constamment tangentes* et que I_m *roule sur* I_f (la définition du roulement pour des courbes gauches étant la même que pour les courbes planes). I_m est la *roulante sphérique;* I_f la *base sphérique*. Le cône Γ_m de sommet O et de base I_m roule sur le cône Γ_f de sommet O et de base I_f.

Dans le mouvement inverse l'axe instantané ne change pas, mais le vecteur $\vec{\omega}$ est remplacé par le vecteur opposé, I est remplacé par I' diamétralement opposé, de plus les sphères fixe et mobile ayant échangé leur rôle I_m est remplacée par I'_f symétrique de I_f par rapport au point O et I_f est remplacée par I'_m symétrique de I_m par rapport à O. Les cônes Γ_m et Γ_f s'échangent.

Dans le mouvement direct ou inverse, si l'une des courbes I_m ou I_f se réduit *à un point* (c'est-à-dire si la direction de $\vec{\omega}$

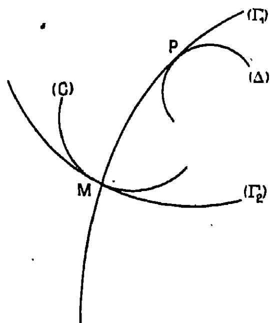
reste invariable dans le corps mobile ou dans l'espace fixe), l'autre se réduit aussi à un point, les deux cônes Γ_f et Γ_m étant dans ce cas réduits à deux droites coïncidantes (se reporter au Chapitre III : Applications cinématiques de la composition des mouvements, 5°), car la direction de $\vec{\omega}$ est invariable à la fois par rapport au corps fixe et au corps mobile dès qu'elle l'est par rapport à l'un quelconque d'entre eux.

On voit donc que les propriétés différentielles du premier ordre du mouvement d'une sphère glissant sur elle-même généralisent très simplement les propriétés analogues du mouvement d'un plan glissant sur lui-même.

Nous allons voir qu'on peut faire une généralisation analogue pour les propriétés du second ordre.

Définissons d'abord la courbure sphérique d'une courbe (C) tracée sur la surface. Pour cela, considérons en chaque point M de (C) (*fig.* 50), le grand cercle Γ_1 passant par M et normal

Fig. 50.



en M à (C), et le grand cercle Γ_2 tangent en M à (C). Lorsque M varie sur (C), le grand cercle (Γ_1) a une enveloppe (Δ) qui est dite *développée sphérique de la courbe* (C). Si P est le point où (Γ_1) touche (Δ), l'arc de grand cercle MP est le rayon de courbure sphérique de (C). (Δ) est l'intersection de la sphère et de la surface polaire de la courbe (C) qui est un cône.

Si l'on considère la sphère mobile définie par les grands

cercles (Γ_1) et (Γ_2), on peut étudier le mouvement de cette sphère mobile qui glisse sur elle-même. Comme le point M décrit la courbe (C), le c. i. r. sphérique se trouve sur le grand cercle (Γ_1). De plus, comme (Γ_1) a pour enveloppe (Δ), le c. i. r. se trouve sur le grand cercle normal à (Δ) au point P; donc *le c. i. r. est au point* P. Ceci montre que la base est la développée (Δ); la roulante est le grand cercle (Γ_1); le grand cercle normal à une courbe sphérique roule donc sur la développée.

Ces propriétés et le lemme relatif à la composition des rotations instantanées concourantes en O permettent d'étendre sans difficulté aux roulettes et aux enveloppes sphériques la construction de Savary donnée au Chapitre V (section B); dans l'énoncé et dans la justification de cette construction, *il suffit de remplacer partout les droites par des grands cercles.*

On peut aussi généraliser pour les courbes sphériques la notion de point d'inflexion; on dira qu'un point M est point d'inflexion d'une courbe (C) si le plan osculateur à la courbe au point M passe par le centre O de la sphère. On peut alors chercher le lieu des points de la sphère mobile qui, à l'instant t, sont points d'inflexion sur leurs trajectoires. Un tel point M est défini par la propriété que le plan mené par O parallèlement aux vecteurs vitesse et accélération de ce point passe par M.

Si l'on a pris des axes rectangulaires $Oxyz$ liés à la sphère mobile, les coordonnées x, y, z de M dans ce système d'axes sont liées par la relation

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x & V_x & \Gamma_x \\ y & V_y & \Gamma_y \\ z & V_z & \Gamma_z \end{vmatrix} = 0,$$

V_x, V_y, V_z étant les composantes de la vitesse de M, Γ_x, Γ_y, Γ_z celles de son accélération.

A l'instant t, ces six quantités sont linéaires et homogènes

en x, y, z [1]; donc l'équation (1) est en général homogène et du troisième degré en x, y, z; elle représente donc un cône du troisième degré de sommet O.

La courbe qui généralise sur la sphère le cercle des inflexions est donc à l'intersection de ce cône et de la sphère.

On peut aussi chercher la généralisation du cercle des rebroussements : si l'on considère les grands cercles qui, à l'instant t, touchent leur enveloppe en un point de rebroussement, on trouve comme lieu de ce point de rebroussement la courbe symétrique de la courbe des inflexions par rapport à la tangente commune à la base et à la roulante.

On peut enfin définir, comme pour le plan, le mouvement épicycloïdal sphérique : c'est le mouvement pour lequel la base et la roulante sont des cercles. Si l'on considère les cônes de révolution de sommet O et ayant pour bases ces cercles, le mouvement résulte aussi du roulement d'un de ces cônes sur l'autre.

L'étude du mouvement d'un solide autour d'un point fixe a de nombreuses applications en Dynamique.

---

(1) On a en effet

$$\vec{V} = [\vec{\omega}.\overrightarrow{OM}] \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = [\vec{\omega}'.\overrightarrow{OM}] - |\omega|^2.\overrightarrow{mM}$$

qui prouvent que les composantes V_x, V_y, V_z ainsi que Γ_x, Γ_y, Γ_z sont linéaires et homogènes en x, y, z, coordonnées de M.



CHAPITRE VII.

ÉTUDE DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE (*suite*).

TROISIÈME PARTIE.

Mouvement le plus général d'un corps solide.

Nous avons vu, au Chapitre II, que le mouvement instantané d'un corps solide à l'instant t est en général un mouvement hélicoïdal.

On peut chercher à obtenir des propriétés géométriques des trajectoires des points du corps à l'instant t, analogues à celles que nous avons trouvées dans les deux cas particuliers que nous avons examinés précédemment.

Complexe des normales aux trajectoires à l'instant t. — Considérons d'abord les normales aux trajectoires de tous les points du corps à l'instant t.

Par chaque point du corps, il passe une infinité de normales, situées dans le plan normal à la trajectoire du point considéré. Comme la position d'un point du corps dépend de trois paramètres, il semble donc que l'ensemble des normales dépende de quatre paramètres, c'est-à-dire que toute droite de l'espace en fasse partie.

Il n'en est rien, car si l'on considère la droite du corps qui coïncide avec une normale à l'instant t, cette droite étant normale à la trajectoire d'un de ses points, est normale à la trajectoire de tous ses points (ceci résulte du théorème démontré au Chapitre II : les projections des vitesses de deux points d'un solide sur la droite qui les joint sont égales). Cette pro-

priété diminue donc d'une unité le nombre des paramètres dont dépend une normale. On en déduit que les normales forment un complexe C_n. D'ailleurs, comme toutes les droites du complexe passant par un point M sont normales à la trajectoire de M, elles sont dans le plan Π normal à la trajectoire; le complexe est donc linéaire. Le plan Π est dit plan polaire de M par rapport au complexe C_n.

On peut encore dire que C_n est le *complexe des droites de moment nul* du système de vecteurs ayant pour moment résultant en M, $\overrightarrow{V_M}$ et pour résultante générale le vecteur rotation $\vec{\omega}$. L'axe du complexe est donc l'axe central de ce système de vecteurs, c'est-à-dire l'axe hélicoïdal instantané.

Étant donnés un plan quelconque P et deux points quelconques de ce plan M_1 et M_2, les plans polaires Π_1 et Π_2 de M_1 et M_2 coupent P suivant deux droites D_1 et D_2 du complexe C_n qui se coupent en un point μ.

La vitesse de μ à l'instant t devant être normale à D_1 et D_2 sera normale au plan P.

μ s'appelle le *pôle du plan* P, le plan polaire π d'un point quelconque M du plan P passera par μ comme y passaient déjà les plans Π_1 et Π_2. Le plan polaire de μ est P lui-même. Toutes les droites du complexe C_n, situées dans P passent par μ.

Il y a réciprocité entre (M, Π) d'une part et (μ, P) de l'autre : *si le pôle* M *de* Π *est situé dans* P, *le pôle* μ *de* P *est situé dans* Π, la droite $M\mu$ est l'intersection des deux plans polaires (Π, P).

Il en résulte que, si M est situé sur une droite quelconque D, son plan polaire passe par une droite fixe Δ, intersection des plans polaires de deux points quelconques M_1 et M_2 de D. Les deux droites D et Δ sont *conjuguées par rapport au complexe* C_n. Tout point de D a son plan polaire passant par Δ et tout plan passant par D a son pôle sur Δ; il y a réciprocité entre D et Δ.

Remarquons d'ailleurs que, dans les cas précédemment étudiés du mouvement plan et du mouvement sphérique, les normales aux trajectoires des points du solide à l'instant t forment bien encore un complexe linéaire, mais c'est un complexe *spécial*, c'est-à-dire formé par toutes les droites rencontrant une droite fixe qui est l'axe instantané.

Considérons maintenant une surface (S) invariablement liée au solide mobile. Lorsque le corps se déplace, l'ensemble des positions de (S) forme une famille de surfaces à 1 paramètre. Soit (Σ) l'enveloppe de cette famille de surfaces. Soit M un des points où (S) touche (Σ) à l'instant t.

Lorsque le temps varie, M se déplace sur la surface (Σ) et aussi, en général, sur (S). Son mouvement sur (Σ) peut être considéré comme résultant de son mouvement sur (S) et du mouvement de la surface (S). Or, la vitesse absolue de M est un vecteur $\overrightarrow{V_a}$ situé dans le plan tangent à (Σ) en M; sa vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$ est située dans le plan tangent à (S) en M, qui est confondu avec le plan tangent à (Σ). Donc, ou bien $\overrightarrow{V_e} = 0$, ou bien $\overrightarrow{V_e}$ est située dans le plan tangent commun à (S) et (Σ).

Toute droite normale à $\overrightarrow{V_e}$ est une droite du complexe C_n. Il en est ainsi en particulier de la normale commune aux deux surfaces en M. Réciproquement, si une normale à (S) en un point M fait partie du complexe C_n, le point M est un point de contact de (S) et (Σ). Il suffit, pour le voir, de reprendre le raisonnement précédent en sens inverse. Si en M on a $\overrightarrow{V_e} = 0$, c'est que C_n est spécial et que M est un point de l'axe instantané de rotation. La normale à S en M appartient encore à C_n.

Soit $Oxyz$ un système d'axes rectangulaires attaché au solide mobile. Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface (S) dans ce système d'axes. La courbe (C) suivant laquelle (S) touche (Σ) à l'instant t est donc définie par la relation

$$v_x f'_x + v_y f'_y + v_z f'_z = 0$$

[jointe à l'équation $f(x, y, z) = 0$], v_x, v_y, v_z étant les composantes sur $Oxyz$ de la vitesse d'un point du solide de coordonnées x, y, z.

Supposons en particulier que la surface (S) soit un plan P. Soit Δ la caractéristique de ce plan; les normales à P le long de Δ vont toutes passer par le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à P. Comme ces droites doivent appartenir au complexe linéaire C_n, elles doivent être dans le plan polaire par rapport à C_n du point à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan P. Donc Δ est à l'intersection de P et de ce plan polaire. Dans ce cas, la droite conjuguée de Δ par rapport à C_n est *orthogonale à* Δ puisqu'elle est perpendiculaire au plan P.

Complexe C_t des tangentes aux trajectoires à l'instant t. — Nous avons étudié l'ensemble des normales aux trajectoires à l'instant t. On peut aussi étudier l'ensemble des tangentes.

Par tout point M du corps passe en général une tangente à la trajectoire de M. Donc, le nombre de paramètres dont dépendent les tangentes est le nombre des paramètres dont dépend M, c'est-à-dire 3. D'ailleurs, ce nombre ne se réduit pas, car une droite tangente à la trajectoire d'un de ses points n'est pas en général tangente aux trajectoires de tous ses points.

Donc, les tangentes aux trajectoires à l'instant t forment un complexe C_t. On peut transformer la définition de ce complexe.

En effet, soit MT une droite de C_t, M le point où cette droite est tangente à la trajectoire de M. Si l'on considère la droite conjuguée de MT par rapport au complexe linéaire C_n (c'est-à-dire la droite par laquelle passent les plans polaires de tous les points de MT), cette droite est dans le plan polaire de M qui n'est autre que le plan perpendiculaire à MT en M. Donc la droite conjuguée de MT par rapport à C_n est orthogonale à MT.

Réciproquement, si une droite D est perpendiculaire à sa conjuguée par rapport au complexe C_n, c'est une droite de C_t, comme on le voit en reprenant en sens inverse le raisonnement précédent. On peut donc dire que le *complexe* C_t *est le complexe des droites orthogonales à leur conjuguée par rapport à* C_n. Cette propriété montre de suite que l'ensemble des droites conjuguées des droites de C_t n'est autre que le complexe C_t lui-même.

Considérons, d'autre part, l'ensemble des plans de l'espace mobile; ces plans dépendent de trois paramètres. Chacun d'eux touche son enveloppe suivant une droite Δ, et deux plans quelconques distincts n'ont jamais la même caractéristique Δ. Les droites Δ dépendent donc de trois paramètres et forment, par conséquent, un complexe. Ce complexe n'est autre que C_t. En effet, la droite conjuguée de Δ par rapport à C_n est le lieu des pôles des plans passant par Δ. En particulier, la conjuguée de Δ passe par le pôle du plan mené par Δ perpendiculairement au plan P dont Δ est la caractéristique; or, ce point est à l'infini dans la direction perpendiculaire à P. Donc, la conjuguée de Δ est perpendiculaire à P et, en particulier, orthogonale à Δ, ce qui montre bien que Δ est une droite du complexe C_t.

Cherchons l'ordre du complexe C_t, c'est-à-dire le degré du cône engendré par les droites de C_t qui passent par un point $S(x_0, y_0, z_0)$ du corps.

Pour avoir l'équation de ce cône, il suffit de trouver le *lieu des points* M *dont la vitesse est dirigée suivant* SM.

Prenons comme axes liés au corps solide mobile des axes $Oxyz$ tels qu'à l'instant t, Oz soit confondu avec l'axe instantané du mouvement. Si ω est la mesure du vecteur rotation sur Oz à l'instant t, h le pas réduit du mouvement hélicoïdal tangent, on a pour les composantes de la vitesse en un point M,

$$v_x = -\omega y,$$
$$v_y = \omega x,$$
$$v_z = h\omega.$$

Si la vitesse de M est dirigée suivant SM, on a

$$\frac{x - x_0}{-\omega y} = \frac{y - y_0}{\omega x} = \frac{z - z_0}{h\omega},$$

en supposant $\omega \neq 0$; posons

$$\frac{x - x_0}{-y} = \frac{y - y_0}{x} = \frac{z - z_0}{h} = \lambda,$$

λ étant un paramètre. On tire de ces équations

$$x = \frac{x_0 + \lambda y_0}{1 + \lambda^2},$$

$$y = \frac{y_0 - \lambda x_0}{1 + \lambda^2},$$

$$z = z_0 - h\lambda.$$

Le lieu de M est donc une cubique gauche passant par S.

Donc, le lieu de SM est un cône du deuxième degré, ce qui montre que *le complexe C_t est du second ordre*. On peut démontrer que la courbe du complexe C_t dans un plan quelconque P est une parabole : c'est l'enveloppe des droites de C_t situées dans le plan; le foyer de la parabole est le pôle μ du plan P dans le complexe C_u, la tangente au sommet est la caractéristique Δ du plan P.

Courbes ayant une enveloppe. — Nous avons étudié l'enveloppe d'une surface liée à l'espace mobile. On peut aussi se demander si une courbe de cet espace a une enveloppe.

Soient :

$$(\mathrm{C}) \qquad \begin{cases} x = x(u), \\ y = y(u), \\ z = z(u) \end{cases}$$

les équations d'une courbe (C) en fonction d'un paramètre u.

Si (C) avait une enveloppe, au point caractéristique M à l'instant t, la vitesse d'entraînement devrait être tangente à (C), car il en est ainsi des vitesses absolue et relative de M;

ce qui se traduit par les relations

$$\frac{x'_u}{-\omega y} = \frac{y'_u}{\omega x} = \frac{z'_u}{h\omega}.$$

On a donc deux équations pour déterminer le paramètre u du point caractéristique. Ces deux équations sont en général incompatibles. Donc, *une courbe quelconque de l'espace mobile n'a pas d'enveloppe.*

On peut alors se proposer de chercher les courbes qui admettent une enveloppe. En un point caractéristique d'une telle courbe, la vitesse d'entraînement doit être portée sur la tangente comme la vitesse relative. Donc, si x, y, z sont les coordonnées de ce point, x, y, z seront des fonctions de t satisfaisant aux équations différentielles

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\xi + qz - ry} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\eta + rx - pz} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\zeta + py - qx},$$

$\xi, \eta, \zeta, p, q, r$ étant les six quantités qui définissent le mouvement du trièdre mobile. En introduisant comme variable auxiliaire la valeur commune λ de ces trois rapports, on démontre que le problème se ramène à l'intégration d'une équation de Riccati par quadratures.

Ces deux équations peuvent encore s'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta + rx - pz}{\xi + qz - ry},$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{\zeta + py - qx}{\xi + qz - ry};$$

les seconds membres sont des fonctions du temps par l'intermédiaire de $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$. En éliminant le temps entre ces deux équations, il restera une équation de la forme

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

c'est-à-dire une seule équation différentielle pour déterminer les deux fonctions inconnues $y(x)$ et $z(x)$. On peut donc

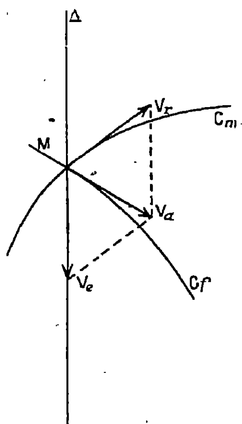
prendre arbitrairement une de ces fonctions; l'autre sera déterminée par une équation différentielle ordinaire. Donc, *les courbes de l'espace mobile qui admettent une enveloppe dépendent d'une fonction arbitraire.*

Surfaces axoïdes. Viration. — Lorsque le temps varie, l'axe hélicoïdal instantané se déplace dans l'espace fixe et y engendre une surface réglée Δ_f; en général, il se déplace aussi dans l'espace mobile et décrit dans cet espace une autre surface réglée Δ_m.

A l'instant t, les surfaces Δ_m et Δ_f ont en commun la génératrice rectiligne Δ. Elles sont de plus tangentes en chaque point de Δ.

En effet, considérons (*fig.* 51) une courbe C_m tracée sur la

Fig. 51.



surface Δ_m et invariable sur cette surface. Soit M le point de C_m qui se trouve sur Δ à l'instant t. Lorsque t varie, le point M se déplace sur C_m. D'autre part, il se déplace par rapport au trièdre fixe, et, comme il est toujours sur Δ, il décrit une courbe C_f tracée sur Δ_f. La vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}$ de M est portée sur la tangente en M à C_f; sa vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$ est portée sur la tangente en M à C_m; enfin, comme M est sur

l'axe instantané Δ, sa vitesse d'entraînement $\overrightarrow{V_e}$ est portée par Δ.

Donc les tangentes en M à C_f et C_m et l'axe Δ sont dans le même plan. Comme, d'une part, Δ et la tangente à C_f déterminent le plan tangent en M à Δ_f, et d'autre part, Δ et la tangente à C_m déterminent le plan tangent à Δ_m, on voit bien que ces deux plans tangents sont confondus.

Les surfaces Δ_m et Δ_f se raccordent donc le long de Δ; en particulier, elles ont *même point central*, *même plan central*, *même paramètre de distribution*.

De plus, si l'on considère à chaque instant le trièdre $Ox_1y_1z_1$ ayant un sommet fixe O et équipollent au trièdre mobile $oxyz$, le mouvement instantané de ce trièdre est une rotation d'axe δ parallèle à Δ. Donc, d'après ce que nous avons vu précédemment (Chapitre VI), le cône décrit par δ dans l'espace mobile $Ox_1y_1z_1$ roule sur le cône décrit par δ dans l'espace fixe (OXYZ). Ceci montre que les angles de Δ avec les génératrices infiniment voisines Δ_1 et Δ'_1 des surfaces Δ_m et Δ_f (Δ_1 et Δ'_1 coïncidant à l'instant $t+dt$) *sont des infiniment petits équivalents*. Le mouvement d'une sphère liée à $Ox_1y_1z_1$ glissant sur une sphère fixe liée à OXYZ s'appelle la *représentation sphérique du mouvement de oxyz par rapport à* OXYZ.

Cherchons s'il existe sur Δ_m des courbes ayant une enveloppe.

Soit C_m une telle courbe (*fig.* 50). Comme elle reste constamment tangente à la surface Δ_f, le point caractéristique de C_m, s'il existe, doit se trouver à l'instant t en M, point où C_m touche Δ_f. M est le point où C_m coupe Δ. Donc C_f, enveloppe de C_m, doit être tangente en M à C_m, c'est-à-dire que $\overrightarrow{V_a}$ et $\overrightarrow{V_r}$ doivent avoir même direction. Or, comme

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_r},$$

ceci ne peut avoir lieu que dans deux cas :

1° $\overrightarrow{V_r}$ et $\overrightarrow{V_e}$ ont même direction, autrement dit C_m *est tan-*

gente en M à Δ. Donc Δ doit avoir pour enveloppe C_m dans l'espace mobile; *Δ_m doit être une surface développable*, C_m étant l'arête de rebroussement. Dans ce cas, C_f est aussi tangente à Δ, donc *Δ_f est aussi une surface développable* d'arête de rebroussement C_f. De plus, les courbes C_m et C_f ont même plan osculateur en M, puisque Δ_m et Δ_f sont tangentes tout le long de Δ. La vitesse V_e de M étant $\neq 0$ en général, C_m glissera sur C_f.

Comme cas particuliers, il se peut que l'arête de rebroussement C_m se réduise à un point. Δ_m est alors un cône ou un cylindre tangent à Δ_f le long de Δ. Il se peut aussi que C_f se réduise à un point; c'est alors Δ_f qui est un cône ou un cylindre et le mouvement est le mouvement inverse du précédent.

Enfin, si C_m et C_f se réduisaient au même point, Δ_m et Δ_f seraient des cônes ou des cylindres de même sommet; si Δ_m et Δ_f sont des cônes, on a le mouvement sphérique étudié précédemment.

2° $\overrightarrow{V_e} = 0$. *Le mouvement instantané est alors, quel que soit t, un mouvement de rotation.*

Pour tout point M mobile sur la surface Δ_m et se trouvant sur Δ à l'instant t, on a

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_r}.$$

Donc toute courbe C_m de la surface Δ_m a une enveloppe C_f sur Δ_f. De plus, si s et S sont les abscisses curvilignes de M sur C_m et C_f respectivement, on a

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dS}{dt}.$$

Donc C_m *roule sur* C_f.

Les deux surfaces Δ_m et Δ_f se correspondent donc de telle sorte qu'à toute courbe de l'une corresponde une courbe de même longueur de l'autre; Δ_m et Δ_f sont donc *applicables* l'une sur l'autre.

Remarquons que, dans ce dernier cas, les complexes C_n et C_t, définis précédemment, se réduisent à des complexes linéaires spéciaux, l'axe de C_t étant la droite de l'infini dans le plan perpendiculaire à l'axe de C_n.

Plus particulièrement, il peut encore se faire que $\overrightarrow{V_e} = 0$, les surfaces Δ_m et Δ_f étant de plus développables. Alors les deux arêtes de rebroussement C_m et C_f *roulent l'une sur l'autre*. De plus, dans la représentation sphérique du mouvement, les lieux des points où δ perce la sphère fixe et la sphère mobile sont évidemment ici les indicatrices Γ_m et Γ_f des tangentes de C_m et C_f. Or, on a vu que ces deux courbes Γ_m et Γ_f roulent toujours l'une sur l'autre. Si s et S sont les arcs des courbes C_m et C_f, σ et Σ ceux de leurs représentations sphériques Γ_m et Γ_f, on a donc

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dS}{dt},$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\Sigma}{dt},$$

d'où

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{dS}{d\Sigma},$$

ce qui montre que C_m *et* C_f *ont même courbure au point* M.

Remarquons enfin que si Δ_m *est un cône ou un cylindre*, Δ_f *est un cône de même sommet ou un cylindre parallèle* et réciproquement.

Récapitulation des roulements. — Nous avons déjà défini dans l'espace le roulement d'une courbe C_1 sur une courbe C_0.

On dit qu'une courbe C_1 roule sur une surface S_0 quand C_1 est constamment tangente à S_0 et quand C_1 roule sur la courbe C_0, lieu du point de contact M sur la surface S_0.

On en déduit, inversement, la définition du roulement d'une surface sur une courbe.

Enfin, on dit qu'une surface S_1 roule sur une surface S_0 si ces

deux surfaces sont constamment tangentes et si les courbes C_1 et C_0, lieux du point de contact M sur S_1 et S_0 respectivement, roulent l'une sur l'autre.

Dans tous les cas où il y a roulement d'une multiplicité sur une autre, on voit que *le point de contact des deux multiplicités a toujours une vitesse d'entraînement nulle;* ceci exige que le *mouvement d'entraînement soit tangent à une rotation, l'axe instantané passant par le point de contact.* Il ne peut donc y avoir roulement d'une multiplicité sur une autre que dans le cas, précédemment étudié, où le mouvement du trièdre mobile est constamment tangent à une rotation [1].

Enfin, peut-il se faire que deux surfaces S_1 et S_0 roulent l'une sur l'autre, en étant en contact le long d'une ligne L, la condition de roulement étant satisfaite en chaque point de L (roulement linéaire)? Comme l'axe instantané doit passer par tous les points de L, L n'est autre que l'axe lui-même. Les surfaces S_0 et S_1 sont les surfaces Δ_m et Δ_f. Donc le roulement linéaire de deux surfaces n'est possible que si ces surfaces sont réglées et applicables l'une sur l'autre. Si l'une est développable, l'autre l'est aussi. Si l'une est un cône, l'autre est un cône de même sommet. Si l'une est un cylindre, l'autre est un cylindre parallèle.

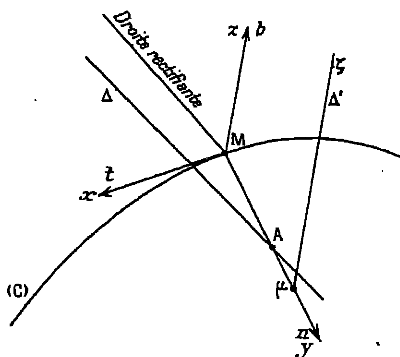
Application. — *Mouvement du trièdre de Frenet d'une courbe gauche.* — Soit $\mathfrak{T}(Mtnb)$ le trièdre de Frenet en un point M d'une courbe gauche C (*fig.* 52). Si $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ sont les vecteurs unitaires portés sur les axes Mt, Mn, Mb, on a la formule

$$\vec{P} = \vec{M} + x\vec{t} + y\vec{n} + z\vec{b},$$

[1] Lorsqu'une des multiplicités roulantes est une surface, on décompose la rotation instantanée $\overrightarrow{M\omega}$ en deux parties : l'une $\overrightarrow{M\omega_n}$, normale à la surface, s'appelle le *pivotement*; l'autre $\overrightarrow{M\omega_t}$, tangente à la surface, s'appelle le *roulement pur*.

P étant un point de coordonnées x, y, z dans le trièdre de Frenet. Nous désignerons le temps par la lettre u.

Fig. 52.



La vitesse d'entraînement de P a donc pour expression

$$\frac{d\vec{P}}{du} = \frac{d\vec{P}}{ds}\frac{ds}{du} = \frac{ds}{du}\left[\frac{d\vec{M}}{ds} + x\frac{d\vec{t}}{ds} + y\frac{d\vec{n}}{ds} + z\frac{d\vec{b}}{ds}\right]$$
$$= \frac{ds}{du}\left[\left(1 - \frac{y}{R}\right)\vec{t} + \left(\frac{x}{R} + \frac{z}{T}\right)\vec{n} - \frac{y}{T}\vec{b}\right],$$

R et T étant les rayons de courbure et de torsion de C au point M.

Cherchons, par exemple, le pôle μ du plan osculateur dans le complexe des normales C_n. C'est le point où la vitesse d'entraînement est parallèle à Mb, c'est-à-dire qu'on doit avoir en ce point

$$z = 0, \qquad 1 - \frac{y}{R} = 0, \qquad \frac{x}{R} + \frac{z}{T} = 0,$$

ou

$$x = 0, \qquad z = 0, \qquad y = R;$$

c'est le centre de courbure μ de la courbe.

La rotation instantanée a pour composantes

$$p = -\frac{1}{T}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{1}{R}$$

lorsque $s = u$, c'est-à-dire lorsque la vitesse de M est l'unité; donc la direction de l'axe instantané est

$$\frac{x}{R} + \frac{z}{T} = 0, \qquad y = 0;$$

c'est la direction de la caractéristique (droite rectifiante) du plan rectifiant Mtb.

L'axe hélicoïdal instantané lui-même a pour équations

$$\frac{x}{R} + \frac{z}{T} = 0, \qquad \frac{1 - \frac{y}{R}}{-\frac{1}{T}} = \frac{-\frac{y}{T}}{\frac{1}{R}},$$

exprimant que la vitesse de P(x, y, z) est parallèle à $\vec{\omega}$; ou

$$y = \frac{RT^2}{R^2 + T^2}, \qquad \frac{x}{R} + \frac{z}{T} = 0.$$

On trouve aussitôt que le pas réduit du mouvement hélicoïdal tangent est $h = \frac{-R^2T}{R^2 + T^2}$.

On voit immédiatement que Δ est une droite parallèle à la droite rectifiante menée par un point A de Mn tel que

$$\overline{MA} = \frac{RT^2}{R^2 + T^2}.$$

Évidemment,

$$\overline{MA} < \overline{M\mu} = R.$$

La droite Δ engendrera dans le trièdre mobile $\mathfrak{T}$ un *conoïde* Δ_m *ayant* Mtb *pour plan directeur et* Mn *pour axe*. Dans l'espace fixe, Δ engendrera une surface réglée Δ_f qui sera gauche comme le conoïde Δ_m.

Si l'on considère maintenant un trièdre $\mathfrak{T}'$ ayant à chaque instant en commun avec $\mathfrak{T}$(Mtnb), d'une part l'origine M, d'autre part la droite Mt, de manière que le mouvement $\left(\frac{\mathfrak{T}'}{\mathfrak{T}}\right)$ soit une rotation d'axe Mt, de valeur algébrique $\frac{1}{T}$ (la vitesse

de M étant toujours supposée égale à 1), on verra aisément que le mouvement instantané de $\mathfrak{T}'$ par rapport à l'espace fixe est une rotation pure dont l'axe Δ' est porté par la *droite polaire* $\mu\zeta$ de (C) en M, dont la valeur algébrique calculée sur l'axe Mb est $\frac{1}{R}$.

Dans ce nouveau mouvement, le plan normal à (C) lié au trièdre $\mathfrak{T}'$, roule sur la surface polaire Σ de (C); Δ'_f est ici la surface polaire et Δ'_m le plan normal à (C) lié à $\mathfrak{T}'$. Δ'_f et Δ'_m sont bien applicables puisque Δ'_f est une surface développable. Une droite liée à Δ'_m et passant par M, a pour enveloppe une courbe de Σ qui est une développée de (C), et elle roule sur cette développée.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES